1. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$　② $k > 3,\ k < -1$　③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$　⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

2. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

3. $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{101} = (a+bi)z$를 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z^2 = -i$, $z^4 = -1$

$z^{101} = (a+bi)z$ 에서 양변을 z 로 나누면

$z^{100} = a+bi$, $(z^4)^{25} = (-1)^{25} = a+bi$

$\therefore a+bi = -1 \Rightarrow a = -1, b = 0$

$\therefore a^2 + b^2 = 1$

4. $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{100}=(a+bi)z$를 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

해설

$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$ 이므로

$z^{100}=(z^2)^{50}=i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\quad -1&=(a+bi)\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)+\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)i\end{aligned}$$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)=-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=0$

$\therefore\ a=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ ab=-\frac{1}{2}$

5. 복소수 z 가 $z+\dfrac{1}{z}=2i$ 를 만족할 때, $z^4+\dfrac{1}{z^4}$ 의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 8 ③ 20 ④ 32 ⑤ 34

해설

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)=2i\ ,\ \left(z+\frac{1}{z}\right)^2=-4$$

$$z^2+\frac{1}{z^2}+2=-4\ ,\ z^2+\frac{1}{z^2}=-6$$

$$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2=36\ ,\ z^4+\frac{1}{z^4}=36-2=34$$

6. $x = 2009,\ y = 7440$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$

$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2 i - x^2 i + xy} = 0$$

따라서 구하는 값은 0

7. 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{2}{\alpha}$, $\frac{2}{\beta}$을 두 근으로 갖고 계수가 정수인 이차방정식은?

① $4x^2 - 3x + 4 = 0$ ② $3x^2 - 4x + 4 = 0$

③ $3x^2 + 4x - 4 = 0$ ④ $4x^2 + 3x - 4 = 0$

⑤ $3x^2 - 3x + 4 = 0$

해설

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 3$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{4}{3} \quad \cdots \text{ 두근의합}$$

$$\frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{3} \quad \cdots \text{ 두근의곱}$$

$$\therefore \quad x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$$

$$\therefore \quad 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

8. $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α^2+1, β^2+1을 두 근으로 하는 x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2+x+25=0$

② $x^2-3x+15=0$

③ $x^2-x+25=0$

④ $x^2+2x+13=0$

⑤ $x^2-2x+13=0$

해설

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-10=-1$

$(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)=-1+2=1$

$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=(\alpha\beta)^2+(\alpha^2+\beta^2)+1$

$=25-1+1=25$

$\therefore\ x^2-x+25=0$

9. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5,\ g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48　　② 56　　③ 64　　④ 72　　⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $-4 \leq t \leq 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t-3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

10. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,
$t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3$.
t 의 범위는 x 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때},\ y = -3 \\ t = 5\text{일때},\ y = 6 \end{cases}$$

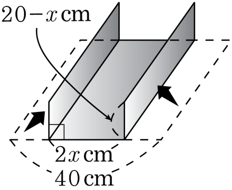
$\therefore\ M \times m = -18$

11. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

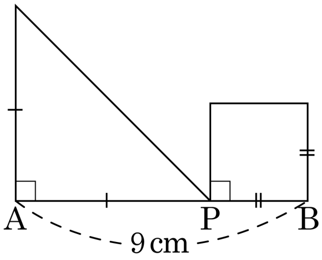
① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200)+100 = -2(x-10)^2+200$
$\therefore\ x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



12. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.