1. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\dfrac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\dfrac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\dfrac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$
$$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$$
(2) $$x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$$

2. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2},\ -2$　② $-\frac{7}{12},\ -\frac{1}{2}$　③ $-\frac{7}{2},\ 2$
④ $-\frac{2}{7},\ 2$　⑤ $\frac{2}{7},\ \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로
$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$
$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$
$7m^2-12m-4=0$
$(7m+2)(m-2)=0$
$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

3. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$ 의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$ 에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

4. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

5. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로
두 근의 합 : $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore\ a = -2$
두 근의 곱 : $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore\ b = 2$
$\therefore\ a + b = -2 + 2 = 0$

6. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 두 근은?

① $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면
$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-\sqrt{2})\left\{x-(\sqrt{2}+1)\right\}=0$
$\therefore x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1$

해설

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

7. 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것을 고르면?

① $x^2 + 5x + 1 = 0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2 + 5 = 0$는 두 허근을 가진다.

③ $m = 0$ 또는 4일 때, $x^2 - mx + m = 0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2 - 2x + 2 - k = 0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2 - 6x + a = 0$ 은 $a = 9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$
② $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$
③ $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m-4) = 0$
⑤ $9 - 1 \cdot a = 9 - a = 0,\ a = 9$
$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2 - 1 \cdot (2-k) = k - 1 > 0 \ \therefore\ k > 1$

8. x에 대한 2차 방정식 $x^2-2ax+a^2+ka-2k+b=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 4　　② 8　　③ 2　　④ -2　　⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = a^2-(a^2+ka-2k+b)=0$

$-ka+2k-b=0$

$k(2-a)-b=0$

$\therefore \quad a=2 \quad b=0 \quad a+b=2$

9. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, $a,\ b$가 정수일 때, 순서쌍 (a,b)의 갯수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$

$a^2+6a+1+4b^2=0$

$\Rightarrow \quad (a+3)^2+(2b)^2=8$

a,b가 정수이므로

$a+3=\pm 2, \quad 2b=\pm 2$

$\therefore \quad a=-1, \ -5, \quad b=1,-1$

가능한 순서쌍 (a,b)의 갯수 : 4개

10. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1\pm\sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{1}{3}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2+bx+c=0$라 하면
$-\frac{b}{a'}=1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}=2$,
$\frac{c}{a'}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$이므로
갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2-2x-5=0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면
$-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$, $\frac{c'}{a}=-\frac{1}{3}$으로
$3x^2-2x-1=0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a=3$, $c=-5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.
따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

11. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, $a,\ b$는 실수)

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\ge 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1\ge 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1\le 0$

$\{(a+b)+1\}^2\le 0$

그런데 $a,\ b$가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab\\ &= -1\end{aligned}$$

12. $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$의 값을 구하면?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 13

해설

α, β가 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0 \cdots\cdots$ ①
$\beta^2+(p-3)\beta+1=0 \cdots\cdots$ ②
①에서 $1+p\alpha+\alpha^2=3\alpha$
②에서 $1+p\beta+\beta^2=3\beta$
$\therefore\ (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$
$=3\alpha\cdot 3\beta$
$=9\alpha\beta$
$=9\ (\because\ \alpha\beta=1)$

13. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$　　② $-\alpha,\ -\beta$　　③ $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$

④ $-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\beta}$　　⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha + \beta = \frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a = 0$에서

(두 근의 합) $= \frac{b}{c} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\ \left(\because \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\right)$

(두 근의 곱) $= \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$의 양변을 $x^2(\neq 0)$으로 나누면

$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$

이 때, $\frac{1}{x} = t$라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2 - bx + a = 0$의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$이다.

14. $x^2 + kxy - 2y^2 + 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 6

해설

$x^2 + kyx - (2y^2 - 3y + 1) = 0$ 에서

$D = k^2y^2 + 4(2y^2 - 3y + 1)$

$= (k^2 + 8)y^2 - 12y + 4$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$\frac{D}{4} = 36 - 4(k^2 + 8) = 0$

$\therefore k = \pm 1$

15. $m>0$이고 이차방정식 $mx^2+(3m-5)x-24=0$의 두 근의 절대값의 비가 $3:2$일 때, 정수가 아닌 m의 값은?

① $\frac{25}{9}$ ② $\frac{26}{9}$ ③ $\frac{28}{9}$ ④ $\frac{29}{9}$ ⑤ $\frac{31}{9}$

해설

$m>0$에서 두 근의 곱이 $-\frac{24}{m}<0$이므로
서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.
따라서, 방정식의 두 근을 3α, -2α라 놓을 수 있다.
근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3\alpha+(-2\alpha)=-\frac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha)=-\frac{24}{m} \end{cases}$$

$\therefore\ \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2=\frac{4}{m}$ $\quad\therefore\ (3m-5)^2=4m$

정리하여 인수분해하면 $(9m-25)(m-1)=0$

$\therefore\ m=\frac{25}{9},\ 1$

따라서 정수가 아닌 m의 값은 $\frac{25}{9}$이다.