1. $3+\sqrt{8}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{x^2+4x}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2<\sqrt{8}<3$이므로

$3+\sqrt{8}-2+2=5+\sqrt{8}-2$ 에서

소수 부분 $x=\sqrt{8}-2$

(2) 단계

$x+2=\sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2+4x+4=8$,

$x^2+4x=4$를 대입하면

(준식)$=\sqrt{4}=2$

2. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y의 값을 구하면?

$$x(\sqrt{2}-3)+y(\sqrt{2}+2)=3\sqrt{2}-4$$

① $x=2,\ y=-1$
② $x=-1,\ y=-2$
③ $x=2,\ y=1$
④ $x=-1,\ y=2$
⑤ $x=1,\ y=2$

해설

$$(-3x+2y)+(x+y)\sqrt{2}=-4+3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} -3x+2y=-4 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$\therefore\ x=2,\quad y=1$

3. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14} - 2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

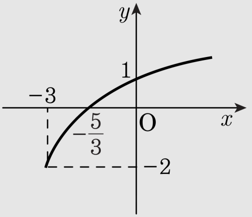
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



4. 함수 $y = \sqrt{-2x + a}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x + 4} - 3$ 의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

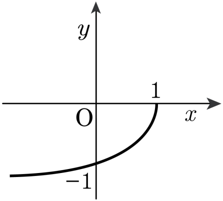
▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x + a}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{-2(x-1) + a} + b = \sqrt{-2x + 2 + a} + b$
이 식이 $y = \sqrt{-2x + 4} - 3$과 같으므로
$2 + a = 4,\ b = -3$
$\therefore\ a = 2,\ b = -3$

5. $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

점$(1,0)$에서 시작이므로 $-\dfrac{b}{a}=1,\ c=0$

$\therefore b=-a,\ c=0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y=-\sqrt{ax-a}$이고

주어진 그래프가 점$(0,-1)$를 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}$

양변을 제곱을 하면 $1=-a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$이므로

$a+b+c=-1+1+0=0$

6. $a \le x \le 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x}+1$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x}+1 = \sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$에서 최댓값을 가지므로

$6 = \sqrt{3-2a}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$

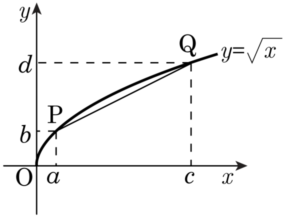
$\therefore a = -11$

또한, $x = 1$에서 최솟값을 가지므로

$m = \sqrt{3-2\times1}+1 = 2$

$\therefore m-a = 13$

7. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\frac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 는

함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$b = \sqrt{a},\ d = \sqrt{c}$

$\therefore\ a = b^2,\ c = d^2$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$\frac{d-b}{c-a} = \frac{d-b}{d^2-b^2} = \frac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \frac{1}{d+b}$ 이고

$\frac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b+d=2$ 이므로

$(\therefore$ 직선 PQ 의 기울기$) = \frac{1}{2}$

8. $0 < a < 1$이고 $x = a + \dfrac{1}{a}$일 때, $\sqrt{x^2 - 4} + x$를 a로 나타내면?

① $2a$　　② $\dfrac{2}{a}$　　③ $-\dfrac{2}{a}$　　④ $-2a$　　⑤ 0

해설

$$\sqrt{x^2 - 4} + x = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + a + \frac{1}{a}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} + a + \frac{1}{a}$$

$$= -\left(a - \frac{1}{a}\right) + a + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

$\left(\because 0 < a < 1\text{일 때, } a < \dfrac{1}{a}\right)$

9. $x = \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{(4+3) - 2\sqrt{4 \times 3}} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$x = 2 - \sqrt{3}$ 에서 $(x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2$

$x^2 - 4x + 4 = 3$

$\therefore\ x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$

$= x^2(x^2 - 4x + 1) + x^3 - 4x^2 + x + 1$

$= x^3 - 4x^2 + x + 1 = x(x^2 - 4x + 1) + 1 = 1$

10. 직선 $y = x + k$가 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \le k < 2$　　② $k \le \frac{3}{2}$, $k > 2$　　③ $\frac{3}{2} \le k \le 2$

④ $k \ge \frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{3}{2} < k < 2$

해설

직선이 ㉠, ㉡ 사이에 있을 때,
교점이 두개다.

㉠: 접할 때

$x + k = \sqrt{2x+3}$에서

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$

$D' = (k-1)^2 - (k^2 - 3) = 0$

$k = 2$

㉡: 직선이 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때

$0 = -\frac{3}{2} + k$에서 $k = \frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{3}{2} \le k < 2$