

1. x 에 대한 다항식 $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -37

해설

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 라 하고 $P(x)$ 가

$(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면

$$P(-1) = P(3) = 0$$

$$P(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \quad \therefore a - b = -7$$

$$P(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \quad \therefore 3a + b = -81$$

$$\therefore a = -22, b = -15$$

2. $(a-b+c)(a+b-c)$ 를 전개한 식은?

① $a^2 + b^2 + c^2 - 2bc$

② $a^2 - b^2 + c^2 - 2bc$

③ $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

④ $a^2 + b^2 - c^2 - 2bc$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$

해설

$$\begin{aligned} & (a-b+c)(a+b-c) \\ &= \{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\} \\ &= a^2 - (b-c)^2 \\ &= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \end{aligned}$$

3. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b$ 가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b 의 값은?

① $a = 12, b = 9$

② $a = -12, b = 9$

③ $a = 12, b = -9$

④ $a = -12, b = -9$

⑤ $a = 9, b = 12$

해설

$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b = (x^2 + px + q)^2$ 으로 놓으면

이 식의 우변은

$$x^4 + 2x^2(px + q) + (px + q)^2$$

$$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$$

좌변과 계수를 비교하면

$$2p = 4, p^2 + 2q = -2$$

$$p = 2, q = -3 \text{에서}$$

$$a = 2pq = -12, b = q^2 = 9$$

4. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면
 $a = -1, b = -1, c = -2$
 $\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$

5. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$ 을 이용하여 $\frac{1999^3+1}{1998 \times 1999+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$$\begin{aligned} a &= 1999 \text{라 하면} \\ 1998 \times 1999 + 1 &= (a-1)a + 1 = a^2 - a + 1 \\ \therefore \frac{1999^3 + 1}{1998 \times 1999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{a^2 - a + 1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 2000 \end{aligned}$$

6. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답:

▶ 정답: ㉤

해설

$$\text{㉤ } 2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b): \text{ 결합법칙}$$

7. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는?

- ① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0
④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$
 $\therefore f(x) - g(x) - 2r(x)$
 $= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x)$
 $= g(x)\{Q(x) - 1\} - r(x)$
여기서 $g(x)$ 의 차수는 $-r(x)$ 의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$ 이다.

8. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x - y - z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy - y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
 $= x^6 - y^6$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1)$
 $= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

9. $P = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$ 의 값을 구하면?

- ① $2^{32} - 1$ ② $2^{32} + 1$ ③ $2^{31} - 1$
④ $2^{31} + 1$ ⑤ $2^{17} - 1$

해설

$$\begin{aligned} & \text{주어진 식에 } (2 - 1) = 1 \text{ 을 곱해도 식은 성립하므로} \\ P &= (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\ &= \quad \vdots \\ &= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1) \\ &= 2^{32} - 1 \end{aligned}$$

10. 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-7x+6 인 두 이차다항식의 합은?

- ① $2x^2+x+3$ ② $2x^2+3x-1$ ③ x^2-x-2
④ $2x^2-x-1$ ⑤ x^2-3x-2

해설

최대공약수가 $x-1$ 이므로
두 다항식을 $A(x-1)$, $B(x-1)$
(A , B 는 서로소인 일차식)으로 놓으면
 $x^3-7x+6=AB(x-1)$
 $(x-1)(x-2)(x+3)=AB(x-1)$
 $\therefore AB=(x-2)(x+3)$
 A , B 는 일차식이어야 하므로
$$\begin{cases} A=x-2 \\ B=x+3 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} A=x+3 \\ B=x-2 \end{cases}$$

따라서 두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$ 이다.
 \therefore (두 다항식의 합)
 $= (x-1)(x-2) + (x-1)(x+3) = 2x^2 - x - 1$

11. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x - 7$ 이고, $x^2 - 3x - 10$ 으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 6x + 5$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $4x + 3$

③ $x - 1$

④ $4x - 9$

⑤ $2x - 3$

해설

$f(x)$ 를 $x^2 - 6x + 5$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + 5)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-5)Q(x) + ax + b \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

$f(x)$ 를 $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $x^2 - 3x - 10$ 으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4x + 3)Q_1(x) + 2x - 7 \\ &= (x-1)(x-3)Q_1(x) + 2x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x - 10)Q_2(x) + 11 \\ &= (x-5)(x+2)Q_2(x) + 11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1) = -5$, $f(5) = 11$ 이다.

㉠에서

$$f(1) = a + b = -5$$

$f(5) = 5a + b = 11$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = 4, b = -9$$

따라서 구하는 나머지는 $4x - 9$ 이다.

12. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x^2+3x-15$ 으로 나누면 나머지가 12이다. 또 $f(x)-g(x)$ 를 $x^2+3x-15$ 로 나누면 나머지가 -2이다.

이때, $f(x)$ 를 $x^2+3x-15$ 으로 나눈 나머지는?

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 24

해설

$$f(x) + g(x) = (x^2 + 3x - 15) Q_1(x) + 12 \cdots \text{㉠}$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 + 3x - 15) Q_2(x) - 2 \cdots \text{㉡}$$

㉠ + ㉡을 하면

$$2f(x) = (x^2 + 3x - 15) (Q_1(x) + Q_2(x)) + 10$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 3x - 15) (Q_1(x) + Q_2(x)) + 5$$

\therefore 나머지는 5

13. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나누는 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.'를 보이는 과정이다.

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
 $A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)로 나타낼 수 있다.
 A 를 B 로 나누는 몫을 Q 라 하면
 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
 $\therefore R = G(a - bQ)$
 즉, G 는 B 와 R 의 (가)이다.
 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나)가 아니라면
 (가) m (일차이상의 다항식)이 존재하여
 $b = mk, a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
 $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
 a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나)이다.
 $B = Gb, R = G(a - bQ)$ 에서
 b 와 $a - bQ$ 가 (나)이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

()안의 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① 공약수, 공약수 ② 공약수, 서로소
 ③ 공약수, 공배수 ④ 공배수, 서로소
 ⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
 $A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)이고,
 A 를 B 로 나누는 몫을 Q 라 하면
 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
 $\therefore R = (a - bQ)G$
 즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
 한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
 공약수인 m 이 존재하여
 $b = mk, a - bQ = mk'$
 $a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
 즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
 $B = Gb, R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

14. x^4 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 r_1 이라 하고, $q(x)$

를 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 나머지를 r_2 라 할 때, r_2 의 값은?

- ① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$$x^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)q(x) + r_1 \text{ 에서 } x = -\frac{1}{2} \text{ 을 대입하면}$$

$$r_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)q(x) = x^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\text{이때, } a = -\frac{1}{2} \text{ 로 놓으면 } (x-a)q(x) = x^4 - a^4$$

$$\therefore q(x) = (x^4 - a^4) \div (x - a)$$

$$= (x+a)(x^2+a^2)$$

따라서, $q(x)$ 를 $x - a$ 로 나눈 나머지 r_2 는

$$q(a) = 4a^3$$

$$\therefore q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{2}$$

15. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)^2$ 으로 나눌 때, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ 라 하면 $a + b + c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 4이므로
 $f(-1) = 4$
 $f(x) = (x-1)^2 Q(x) \dots \text{㉠}$
 $f(x) = (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + ax^2 + bx + c$
 $= (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + a(x-1)^2 \quad (\because \text{㉠})$
 양변에 $x = -1$ 를 대입하면
 $f(-1) = 4a = 4 \therefore a = 1$
 $ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
 $\therefore b = -2, c = 1$
 $\therefore a + b + c = 0$

해설

$ax^2 + bx + c$ 를 구하는 것이 아니라 $a + b + c$ 를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로 $f(1) = 0$
 $f(x) = (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + ax^2 + bx + c$
 양변에 $x = 1$ 를 대입하면
 $f(1) = 0 + (a + b + c) = 0$
 $\therefore a + b + c = 0$