1. x 에 대한 다항식 $4x^3-3x^2+ax+b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x)=4x^3-3x^2+ax+b$ 라 하고 $P(x)$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면

$P(-1)=P(3)=0$

$P(-1)=-4-3-a+b=0 \quad \therefore \ a-b=-7$

$P(3)=108-27+3a+b=0 \quad \therefore \ 3a+b=-81$

$\therefore \ a=-22, \ b=-15$

2. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$ ② $a^2-b^2+c^2-2bc$

③ $a^2-b^2-c^2+2bc$ ④ $a^2+b^2-c^2-2bc$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$(a-b+c)(a+b-c)$

$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-b^2-c^2+2bc$

3. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$

② $a=-12,\ b=9$

③ $a=12,\ b=-9$

④ $a=-12,\ b=-9$

⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

4. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

x^2-2x-y^2+2y

$=(x^2-y^2)-2(x-y)$

$=(x+y-2)(x-y)$

$=(x+ay)(x-by+c)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-1, c=-2$

$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

5. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore\ \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2000$$

6. 두 다항식 $A=a+2b$, $B=2a+3b$일 때, $2A+B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A+B &= 2(a+2b)+(2a+3b) \\ &= (2a+4b)+(2a+3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a+(4b+2a)+3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a+(2a+4b)+3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a+2a)+(4b+3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2+2)a+(4+3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a+7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a+(2a+4b)+3b=(2a+2a)+(4b+3b)$: 결합법칙

7. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0

④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$

$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$

$=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$

$=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

8. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

9. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$P = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)$$
$$= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$= \quad \vdots$$
$$= (2^{16}-1)(2^{16}+1)$$
$$= 2^{32}-1$$

10. 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-7x+6인 두 이차다항식의 합은?

① $2x^2+x+3$　② $2x^2+3x-1$　③ x^2-x-2

④ $2x^2-x-1$　⑤ x^2-3x-2

해설

최대공약수가 $x-1$이므로

두 다항식을 $A(x-1)$, $B(x-1)$

(A, B는 서로소인 일차식)으로 놓으면

$x^3-7x+6=AB(x-1)$

$(x-1)(x-2)(x+3)=AB(x-1)$

$\therefore\ AB=(x-2)(x+3)$

A, B는 일차식이어야 하므로

$$\begin{cases} A=x-2 \\ B=x+3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} A=x+3 \\ B=x-2 \end{cases}$$

따라서 두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$이다.

$\therefore$ (두 다항식의 합)

$=(x-1)(x-2)+(x-1)(x+3)=2x^2-x-1$

11. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $4x+3$ ③ $x-1$

④ $4x-9$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6x+5)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠ \end{aligned}$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7 \\ &= (x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x-10)Q_2(x)+11 \\ &= (x-5)(x+2)Q_2(x)+11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1)=-5,\ f(5)=11$이다.
㉠에서
$f(1)=a+b=-5$
$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면
$a=4,\ b=-9$
따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

12. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나누면 나머지가 12이다. 또 $f(x)-g(x)$를 $x^2+3x-15$로 나누면 나머지가 -2이다.

이때, $f(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나눈 나머지는?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 24

해설

$f(x)+g(x)=\left(x^2+3x-15\right)Q_1(x)+12\cdots㉠$

$f(x)-g(x)=\left(x^2+3x-15\right)Q_2(x)-2\cdots㉡$

㉠+㉡을 하면

$2f(x)=\left(x^2+3x-15\right)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)+10$

$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+3x-15\right)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)+5$

$\therefore$ 나머지는 5

13. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.' 를 보이는 과정이다.

> A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
> $A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 로 나타낼 수 있다.
> A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
> $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
> 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
> (가) m (일차이상의 다항식) 이 존재하여
> $b = mk$, $a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
> a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
> $B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서
> b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

(　) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수　　② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수　　④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
$A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 이고,
A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
$b = mk$, $a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

14. x^4을 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 r_1이라 하고, $q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지를 r_2라 할 때, r_2의 값은?

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)q(x) + r_1$에서 $x = -\frac{1}{2}$을 대입하면

$r_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)q(x) = x^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

이때, $a = -\frac{1}{2}$로 놓으면 $(x-a)q(x) = x^4 - a^4$

$$\begin{aligned}\therefore\ q(x) &= (x^4 - a^4) \div (x-a)\\ &= (x+a)(x^2+a^2)\end{aligned}$$

따라서, $q(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지 r_2는

$q(a) = 4a^3$

$$\begin{aligned}\therefore\ q\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

15. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-1)^2$으로 나눌 때, 나머지를 ax^2+bx+c라 하면 $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 4이므로
$f(-1)=4$
$f(x)=(x-1)^2Q(x)\cdots$ ㉠
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
$\quad\quad=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+a(x-1)^2\ (\because$ ㉠$)$
양변에 $x=-1$를 대입하면
$f(-1)=4a=4\ \therefore a=1$
$ax^2+bx+c=a(x-1)^2=x^2-2x+1$
$\therefore\ b=-2, c=1$
$\therefore\ a+b+c=0$

해설

ax^2+bx+c를 구하는 것이 아니라 $a+b+c$를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어지므로 $f(1)=0$
$f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=1$를 대입하면
$f(1)=0+(a+b+c)=0$
$\therefore a+b+c=0$