1. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$이므로

$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서

$3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = 5,\ -1$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.

$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x) = \begin{cases} x & (x \le 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$ 가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 $a,\ b$ 의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

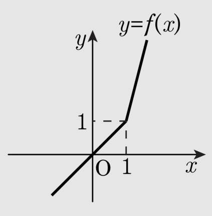
① $a=1,\ b=-1$ ② $a=1,\ b=1$ ③ $a=2,\ b=-1$

④ $a=2,\ b=0$ ⑤ $a=-1,\ b=2$

해설

f가 일대일대응이 되려면

$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=ax+b$가

점 $(1,\ 1)$을 지나야 하므로

$a+b=1 \quad \cdots$ ㉠

또, 직선 $y=x$의 기울기가 양이므로 직선

$y=ax+b$의 기울기도 양이어야 한다.

$\therefore\ a>0 \quad \cdots$ ㉡

따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을

모두 만족시키는 것은 ③이다.

3. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

4. 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=4-3x$ 에 대하여 $h\circ f=g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)$
② $h(x)=3x-1$
③ $h(x)=x-3$
④ $h(x)=3-x$
⑤ $h(x)=x+3$

해설

$(h\circ f)(x)=4-3x$ 에서

$f(x)=t$ 라 하면 $t=3x-1,\ 3x=t+1$

$x=\dfrac{1}{3}(t+1)$ 을 대입하면

$h(t)=4-3\times\dfrac{1}{3}(t+1)=3-t$

$\therefore\ h(x)=3-x$

5. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \to x+1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002　② 2004　③ 2006　④ 2008　⑤ 2010

해설

$f^2(x) = f(f(x)) = (x+1)+1 = x+2$
$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x+2)+1 = x+3$
$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x+3)+1 = x+4$
$\vdots$
이상에서 $f^n(x) = x+n$ 이므로
$f^{2006}(x) = x+2006$
$\therefore\ f^{2006}(2) = 2+2006 = 2008$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax+b$ 에 대하여 $f(1) = 4$, $f^{-1}(6) = 2$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(1) = 4$ 이므로
$a + b = 4 \cdots$ ㉠
$f^{-1}(6) = 2$ 에서 $f(2) = 6$ 이므로
$2a + b = 6 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 2$
$\therefore\ a^2 + b^2 = 8$

7. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

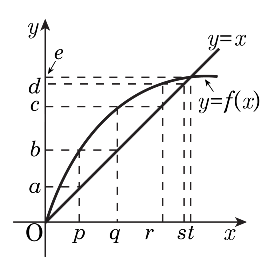
㉠ $f(x) = x + 2$	㉡ $f(x) = -x - 1$
㉢ $f(x) = \frac{1}{x}$	㉣ $f(x) = 2x$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.
㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$
㉡ $(f \circ f)(x) = x$
㉢ $(f \circ f)(x) = x$
㉣ $(f \circ f)(x) = 4x$
따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

8. 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p　　② q　　③ r

④ s　　⑤ t

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

9. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x+4$, $g(x) = -2x+3$ 이고 $\left(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h\right)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x+4$, $g(x) = -2x+3$ 에 대하여
$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로
$g^{-1} \circ h = f \circ f$, $h = g \circ f \circ f$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= g(f(f(x))) \\ &= g(f(x+4)) \\ &= g((x+4)+4) \\ &= g(x+8) \\ &= -2(x+8)+3 = -2x-13 \end{aligned}$$

$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$
$-2a-13 = 5$, $-2a = 18$
$\therefore a = -9$
$\therefore\ h^{-1}(5) = -9$

10. 두 함수 $f(x) = ax+b(a \neq 0), g(x) = x+2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f^{-1})(3x-1) = 2x+1$ 이 성립할 때, $f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ 이므로
준식은 $(f \circ g)^{-1}(3x-1) = 2x+1$ 이다.
$(f \circ g)(2x+1) = 3x-1$ 에서
$f(g(2x+1)) = 3x-1$, $f(2x+3) = 3x-1$
$2ax+3a+b = 3x-1$ 에서 $a = \frac{3}{2}$
$3a+b = -1$ 에서 $b = -\frac{11}{2}$
$\therefore\ f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$
$f^{-1}(2) = k$ 라 하면 $f(k) = \frac{3}{2}k - \frac{11}{2} = 2$
$\therefore\ k = 5$