

1. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8

② -4

③ -2

④ 5

⑤ 2

해설

$$x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$$

$$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$$

$$(1 - k)x^2 + 7x + 3 = 0$$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = 7^2 - 4 \cdot (1 - k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$$

$$37 + 12k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{37}{12}$$

따라서 최대정수는 -4이다.

2. 이차함수 $y = x^2 + 4x + 1$ 의 최솟값을 구하면?

① -1

② 1

③ -3

④ 3

⑤ -5

해설

$$y = x^2 + 4x + 1$$

$$= (x + 2)^2 - 3$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값은 -3 이다.

3. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

4. $|x+1| + |x-2| = x+3$ 을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x < -1$ 일 때,

$$-x-1-x+2 = x+3$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ (모순)}$$

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$x+1-x+2 = x+3$$

$$\therefore x = 0$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x+1+x-2 = x+3$$

$$\therefore x = 4$$

5. 이차방정식 $(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 6 = 0$ 의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2 + \sqrt{3}$ 을 곱하면

$$x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x - (12 + 6\sqrt{3}) = 0$$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x = (\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 12 + 6\sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore x = 3\sqrt{3} + 3 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3} - 1$$

큰 근은 $3\sqrt{3} + 3$

그런데 $\sqrt{3} \approx 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

6. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이 0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

$$\begin{aligned} 1) \quad ax + 1 &= x^2 + x + 2 & 2) \quad ax + 1 &= -x^2 + 4x \\ \Rightarrow x^2 + (1-a)x + 1 &= 0 & \Rightarrow x^2 + (a-4)x + 1 &= 0 \\ D = (a-1)^2 - 4 < 0 & & \Rightarrow D = (a-4)^2 - 4 < 0 \\ \Rightarrow -1 < a < 3 & & \Rightarrow 2 < a < 6 \end{aligned}$$

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$

$$\therefore \alpha + \beta = 5$$

7. 이차함수 $y = ax^2 + 4x + 2$ 에서 $|a| = 1$ 일 때, 각각의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 4x + 2 \\ &= a \left(x + \frac{2}{a} \right)^2 - \frac{4}{a} + 2 \end{aligned}$$

$a = 1$ 일 때, $-\frac{4}{1} + 2$ 를 최솟값, $a = -1$ 일 때 $\frac{4}{1} + 2$ 를 최댓값으로 갖는다.

$$\therefore (-2) + 6 = 4$$

8. 초속 50m 로 지상에서 곧바로 위로 던진 돌의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 x 와 y 사이에는 $y = 40x - 5x^2$ 의 관계식이 성립한다. 돌이 최고의 높이에 도달하는 것은 몇 초 후인지 구하여라.



답:

초 후



정답: 4초 후

해설

$$y = 40x - 5x^2$$

$$y = -5(x - 4)^2 + 80$$

$x = 4$ 일 때, 최댓값 80 을 갖는다.

9. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$ 를 만족할 때, k 의 값을 구하면?

① 7

② 6

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4$, $\alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma$, $\beta + \gamma = 2 - \alpha$, $\gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore k = 4$

10. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$ 이 허근 α 를 갖고, α^3 이 실수일 때, m 의 값은?

① 0

② 1

③ 3

④ 0, 3

⑤ 0, 1, 3

해설

α^3 이 실수이므로 $\bar{\alpha}^3 = \alpha^3$,

$$(\alpha - \bar{\alpha})(\alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) = 0$$

α 는 허수이므로 $\alpha \neq \bar{\alpha}$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 = 0 \cdots \cdots (i)$$

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \bar{\alpha} = m-1, \alpha\bar{\alpha} = m+1$$

$$(i) \text{은 } (\alpha + \bar{\alpha})^2 - \alpha\bar{\alpha} = 0, (m-1)^2 - (m+1) = 0$$

$$m^2 - 3m = m(m-3) = 0$$

$$\therefore m = 0, 3$$

이차방정식 $x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$ 이

허근을 가지므로 $D = (m-1)^2 - 4(m+1) < 0$

$m = 0, 3$ 은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.