1. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

2. 복소수 $z = a + bi$일 때, z의 켤레 복소수 $\bar{z} = a - bi$로 나타낸다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, a, b는 실수)

① $\overline{2+i} = 2-i$

② $\overline{-2-\sqrt{3}i} = -2+\sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1} = i+1$

④ $\bar{0} = 0$

⑤ $\overline{-2} = -2$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.
③ $i-1$의 허수부분은 i 이므로 $\overline{i-1} = -i-1$이다.
실수의 켤레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

3. 방정식 $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{4}$ 의 해를 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

양변에 12를 곱하면 $4(x+2) - 6 = 3(2x+1)$

이항하여 정리하면 $4x - 6x = 3 - 8 + 6$, $-2x = 1$

$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2 + a(a-1)x + 3a = 0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근은? (단, a는 상수)

① -1 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x = 1$을 대입하면

$1^2 + a(a-1) + 3a = 0$

$a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = 0$

$\therefore\ a = -1$

$x^2 - 1 \cdot (-2)x - 3 = x^2 + 2x - 3$

$= (x+3)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1, -3 \quad \therefore\ x = -3$

5. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$	㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근

㉡ $a=1, b'=1, c=4$

$1^2-1\cdot4=-3<0$: 허근

㉢ $a=1, b'=2, c=2$

$2^2-1\cdot2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

6. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

두 근이 각각 α와 β이므로

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=2$이다.

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}$

7. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$
④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서
$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

8. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $x = -2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.
② $x = -2$일 때, 최솟값 3을 갖는다.
③ $x = 2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.
④ $x = 2$일 때, 최솟값 3을 갖는다.
⑤ $x = -\frac{1}{3}$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

해설

$x = 2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

9. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

10. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 틀린 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$ 라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$ 이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

11. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \ y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

12. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

13. $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{101}=(a+bi)z$를 만족시키는 실수 a,b 에 대하여 a^2+b^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z^2=-i$, $z^4=-1$

$z^{101}=(a+bi)z$ 에서 양변을 z 로 나누면

$z^{100}=a+bi$, $(z^4)^{25}=(-1)^{25}=a+bi$

$\therefore a+bi=-1 \Rightarrow a=-1, b=0$

$\therefore a^2+b^2=1$

14. 복소수 z 가 $z+\frac{1}{z}=2i$ 를 만족할 때, $z^4+\frac{1}{z^4}$ 의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 8 ③ 20 ④ 32 ⑤ 34

해설

$\left(z+\frac{1}{z}\right)=2i$, $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=-4$

$z^2+\frac{1}{z^2}+2=-4$, $z^2+\frac{1}{z^2}=-6$

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2=36$, $z^4+\frac{1}{z^4}=36-2=34$

15. 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{2}{\alpha}$, $\frac{2}{\beta}$을 두 근으로 갖고 계수가 정수인 이차방정식은?

① $4x^2-3x+4=0$
② $3x^2-4x+4=0$
③ $3x^2+4x-4=0$
④ $4x^2+3x-4=0$
⑤ $3x^2-3x+4=0$

해설

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \ \alpha\beta=3$

$\therefore \frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{4}{3}$ ⋯ 두근의합

$\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{2}{\beta}=\frac{4}{\alpha\beta}=\frac{4}{3}$ ⋯ 두근의곱

$\therefore\ x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}=0$

$\therefore\ 3x^2-4x+4=0$

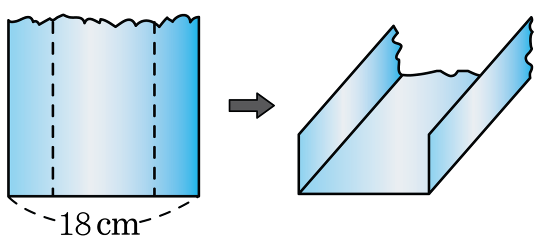
16. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \le x \le 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \le x \le 3$ 에서 $-4 \le t \le 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t-3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

17. 다음 그림과 같이 너비가 18cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 되도록 하려면 물받이의 높이를 얼마로 해야 하는가?



① 4.5 cm　② 4.0 cm　③ 3.8 cm
④ 3.6 cm　⑤ 3.4 cm

해설

물받이의 높이를 x 라 할 때,
단면의 넓이는 $y = x(18-2x)$

$y = -2x^2 + 18x = -2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$

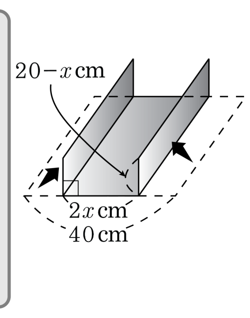
따라서 $x = \frac{9}{2}$(cm) 일 때, 최대값 $\frac{81}{2}$(cm^2)를 갖는다.

18. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10　　② 8　　③ 6　　④ 4　　⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200)+100 = -2(x-10)^2+200$
$\therefore$ $x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



19. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
>
> ㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면, $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.
>
> ㉢ $\alpha = \beta$ 이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
>
> ㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$ 는 순허수이다.
>
> ㉤ $\alpha - \beta$ 가 실수이면 $\alpha > \beta$ 이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$\alpha = a + bi$,$\beta = c + di$ (a, b, c, d는 실수)

㉠ $\alpha = \overline{\beta} \Rightarrow \beta = \overline{\alpha}$

$\alpha\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha\overline{\alpha} = 0$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$

$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$(참)

㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$(거짓)

㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)

㉤ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0,\; b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

20. a, b가 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$중 하나일 때, 등식 $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 조건은

ⅰ) $a+b=0$ 이고 $a-b \neq 0$

ⅱ) $a-b<0$ 이고 $a+b>0$

ⅰ)의 경우 $(-2,\ 2)\ (2,\ -2)\ (-1,\ 1)\ (1,\ -1)$

ⅱ)의 경우 $(-1,\ 2)\ (0,\ 2)\ (0,\ 1)\ (1,\ 2)$

$\therefore$ 모두 8개