1. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

2. 복소수 $z = a + bi$일 때, z의 켤레 복소수 $\bar{z} = a - bi$로 나타낸다. 다음 중 옳지 않은 것은? (단, a, b는 실수)

① $\overline{2+i} = 2 - i$

② $\overline{-2 - \sqrt{3}i} = -2 + \sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1} = i + 1$

④ $\overline{0} = 0$

⑤ $\overline{-2} = -2$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.

③ $i - 1$의 허수부분은 i이므로 $\overline{i-1} = -i - 1$이다.

실수의 켤레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

3. 방정식 $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{4}$ 의 해를 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

양변에 12를 곱하면 $4(x+2)-6=3(2x+1)$

이항하여 정리하면 $4x-6x=3-8+6$, $-2x=1$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+a(a-1)x+3a=0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근은? (단, a는 상수)

① -1 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x=1$을 대입하면

$1^2+a(a-1)+3a=0$

$a^2+2a+1=(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$

$x^2-1\cdot(-2)x-3=x^2+2x-3$

$=(x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,-3 \quad \therefore\ x=-3$

5. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$	㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근

㉡ $a=1, b'=1, c=4$

$1^2-1\cdot 4=-3<0$: 허근

㉢ $a=1, b'=2, c=2$

$2^2-1\cdot 2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

6. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값은?

① $-\dfrac{3}{2}$　② $-\dfrac{3}{2}$　③ $-\dfrac{1}{6}$　④ $\dfrac{2}{5}$　⑤ $\dfrac{5}{2}$

해설

두 근이 각각 α와 β이므로
$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=2$이다.

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}$$

7. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$　② $k > 3,\ k < -1$　③ $k > 1,\ k < -1$
④ $k > 3,\ k < -2$　⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1-k)x + 1 = 0$ 에서
$\mathrm{D} = (1-\mathrm{k})^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

8. 이차함수 $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+3$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $x=-2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

② $x=-2$일 때, 최솟값 3을 갖는다.

③ $x=2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

④ $x=2$일 때, 최솟값 3을 갖는다.

⑤ $x=-\frac{1}{3}$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

해설

$x=2$일 때, 최댓값 3을 갖는다.

9. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$

모든 x에 대해 성립하려면

$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$

공통근 : $a=1$

10. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

11. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$

$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,

$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

12. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x - 9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

13. $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{101} = (a+bi)z$를 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z^2 = -i$, $z^4 = -1$

$z^{101} = (a+bi)z$ 에서 양변을 z 로 나누면

$z^{100} = a + bi$, $(z^4)^{25} = (-1)^{25} = a + bi$

$\therefore a + bi = -1 \Rightarrow a = -1, b = 0$

$\therefore a^2 + b^2 = 1$

14. 복소수 z 가 $z+\dfrac{1}{z}=2i$ 를 만족할 때, $z^4+\dfrac{1}{z^4}$ 의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 8 ③ 20 ④ 32 ⑤ 34

해설

$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=2i$, $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=-4$

$z^2+\dfrac{1}{z^2}+2=-4$, $z^2+\dfrac{1}{z^2}=-6$

$\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2=36$, $z^4+\dfrac{1}{z^4}=36-2=34$

15. 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{2}{\alpha}$, $\frac{2}{\beta}$을 두 근으로 갖고 계수가 정수인 이차방정식은?

① $4x^2-3x+4=0$
② $3x^2-4x+4=0$
③ $3x^2+4x-4=0$
④ $4x^2+3x-4=0$
⑤ $3x^2-3x+4=0$

해설

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=3$

$$\therefore \frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{4}{3} \quad \cdots \text{ 두근의합}$$

$$\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{2}{\beta}=\frac{4}{\alpha\beta}=\frac{4}{3} \quad \cdots \text{ 두근의곱}$$

$$\therefore \quad x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}=0$$

$$\therefore \quad 3x^2-4x+4=0$$

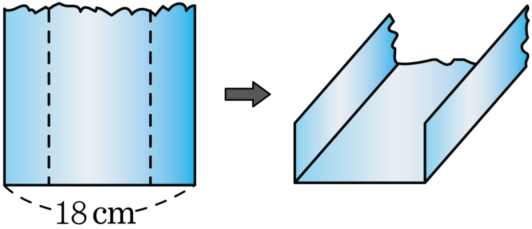
16. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5,\ g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $-4 \leq t \leq 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t-3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

17. 다음 그림과 같이 너비가 18cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 되도록 하려면 물받이의 높이를 얼마로 해야 하는가?



① 4.5 cm ② 4.0 cm ③ 3.8 cm

④ 3.6 cm ⑤ 3.4 cm

해설

물받이의 높이를 x 라 할 때,

단면의 넓이는 $y = x(18 - 2x)$

$$y = -2x^2 + 18x = -2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$$

따라서 $x = \frac{9}{2}$(cm) 일 때, 최대값 $\frac{81}{2}$(cm^2)를 갖는다.

18. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

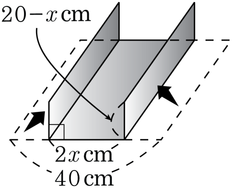
해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.

단면의 넓이는

$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200)+100 = -2(x-10)^2+200$

$\therefore\ x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



19. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, α 는 $\overline{\alpha}$ 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$이다.
㉡ $\alpha^2+\beta^2=0$이면, $a=0$이고 $\beta=0$이다.
㉢ $\alpha=\beta$이면, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉣ $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$는 순허수이다.
㉤ $\alpha-\beta$가 실수이면 $\alpha>\beta$이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$\alpha=a+bi$,$\beta=c+di$ $(a,b,c,d$는 실수$)$
㉠ $\alpha=\overline{\beta}\Rightarrow\beta=\overline{\alpha}$
$\alpha\beta=0 \ \Leftrightarrow \ \alpha\overline{\alpha}=0$
$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$
$\therefore a=0,b=0\Rightarrow\alpha=0$(참)
㉡ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$
㉢ $\alpha+\beta=2a+2bi,\alpha\beta=(a^2-b^2)+2abi$(거짓)
㉣ $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=2(ac+bd)\Rightarrow$ 실수 (거짓)
㉤ $\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i \therefore b-d=0,\ b=d$ $\alpha>\beta$ 는 알 수 없다(거짓)

20. a, b가 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$중 하나일 때, 등식 $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 조건은

i) $a+b=0$ 이고 $a-b \neq 0$

ii) $a-b<0$ 이고 $a+b>0$

i)의 경우 $(-2,\ 2)\ (2,\ -2)\ (-1,\ 1)\ (1,\ -1)$

ii)의 경우 $(-1,\ 2)\ (0,\ 2)\ (0,\ 1)\ (1,\ 2)$

$\therefore$ 모두 8개