1. $ax^2-2ax+3<0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$　　② $-1<a<3$　　③ $0 \le a \le 3$

④ $-1<a<4$　　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a=0$일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y=ax^2-2ax+3$에서 $D \le 0$이므로

$a^2-3a \le 0$

$\therefore 0<a \le 3 (\because a \neq 0)$

2. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \le -1,\ x \le 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \le -1,\ x \ge 3$이다.

⑤ $a \ge b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \ge 0$(이차부등식이므로 $a \ne b$)

i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 3$

ii) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \ge 0$

$\therefore x \le -1,\ x \ge 3$

3. 부등식 $3[x]^2 + [x] - 10 \le 0$의 해는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 1$ ② $-3 \le x < 2$ ③ $-2 \le x < 1$

④ $-2 \le x < 2$ ⑤ $-2 \le x < 3$

해설

$3[x]^2 + [x] - 10 \le 0$이므로

$([x]+2)(3[x]-5) \le 0$

$-2 \le [x] \le \dfrac{5}{3}$

$[x]$는 정수이므로

$-2 \le [x] \le 1$

$\therefore -2 \le x < 2$

4. 모든 실수 x에 대해 이차부등식 $x^2 - x(kx-3)+3 > 0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2 + 3x + 3 > 0$

$D = 3^2 - 4 \times (1-k) \times 3 < 0$

$\therefore k < \dfrac{3}{12} = 0.25$

최대 정수 $k = 0$

5. x에 관한 이차부등식 $x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 상수 a의 범위를 구하면 $p < a < q$이다. 이 때, pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = 12$

해설

$x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D < 0$을 만족해야 한다.
$D = a^2 - 4(2a - 3) < 0$
$a^2 - 8a + 12 < 0$
$(a - 6)(a - 2) < 0$
$2 < a < 6 \quad \therefore p = 2, q = 6$
$\therefore \ pq = 2 \times 6 = 12$

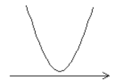
6. 모든 실수 x에 대하여 부등식$(k-2)x^2+2(k-2)x+1>0$이 성립할 때, 실수 k값의 범위가 $m \le k < n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m+n=5$

해설

① $k=2$일 때 $1>0$ $\therefore$성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2)>0$, $k>2$

③ $\dfrac{D}{4}<0$에서 $(k-2)^2-(k-2)<0$

$(k-2)(k-3)<0$, $2<k<3$

①을 만족하거나 ②와 ③)을 동시에 만족해야 하므로 $2 \le k < 3$

$\therefore m=2, n=3$, $m+n=5$

7. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면
$x^2-5x+6<0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2+5x-6>0 \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

8. x 에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 이려면

$(x-1)(x-4)>0$ 에서 $x^2-5x+4>0$ 이므로

$a=-5$, $b=4$ 따라서 $a+b=-1$

9. x 에 대한 이차부등식 $ax^2+5x+b<0$ 의 해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값은?

① -7 ② -3 ③ 3 ④ 7 ⑤ 10

해설

해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 이므로 $a<0$

해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은

$(x-2)(x-3)>0,\ x^2-5x+6>0$

양변에 -1을 곱하면

$-x^2+5x-6<0$

$\therefore a=-1,\ b=-6$

$a+b=-7$

10. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=10$

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$$x=\frac{3+\alpha}{4},\quad \frac{3+\beta}{4}$$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

11. 두 함수 $f(x)=mx^2-4x+4$, $g(x)=-2x^2+2mx$ 가 있다. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)<y<f(x)$ 를 만족시키는 실수 y 가 존재할 때, 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-3<m<0$ ② $-2<m\le 3$ ③ $0\le m<2$

④ $-2\le m<2$ ⑤ $-2<m\le 4$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(x)-g(x)>0$ 을 만족시키는 조건을 구한다.

$f(x)-g(x)=(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$

(i) $m+2=0$ 이면 $f(x)-g(x)=4>0$

따라서 $m=-2$ 일 때, 성립한다.

(ii) $m+2>0$, $\frac{D}{4}<0$ 에서

$-2<m<2$

(i), (ii) 에서 $-2\le m<2$

12. 부등식 $|x^2-1|+3x<3$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.

(i) $x^2-1\geq 0$,
즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,
$|x^2-1|=x^2-1$이므로 주어진 부등식은
$x^2-1+3x<3,\ x^2+3x-4<0$
$(x+4)(x-1)<0$
$\therefore -4<x<1$

이 때 조건에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이므로
이를 만족하는 x값의 범위는 $-4\leq x\leq -1$

(ii) $x^2-1<0$,
즉 $-1<x<1$일 때,
$|x^2-1|=-x^2+1$이므로 주어진 부등식은
$-x^2+1+3x<3,\ x^2-3x+2>0$
$(x-1)(x-2)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

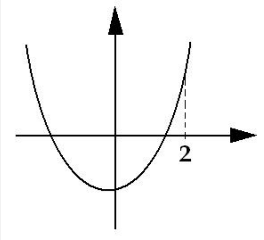
이 때 조건에서 $-1<x<1$이므로
이를 만족하는 x의 값의 범위는 $-1<x<1$
(i), (ii)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4<x<1$
따라서 $\alpha=-4,\ \beta=1,\ \alpha+\beta=-3$

13. $x>2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+k-1>0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4=k^2-k+1>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2)\geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k<2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=3-3k\geq 0$에서 $k\leq 1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k\leq 1$

k의 최댓값은 1이다.

14. 세 변의 길이가 x, $x+1$, $x+2$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되는 x의 범위가 $\alpha < x < \beta$일 때,$\alpha+\beta$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0 \cdots\cdots$ ㉠

$x+2$가 최대변이므로

$x+2 < (x+1)+x \quad \therefore\ x > 1 \cdots\cdots$ ㉡

둔각삼각형이 되는 조건은

$(x+2)^2 > (x+1)^2 + x^2$

$\therefore\ -1 < x < 3 \cdots\cdots$ ㉢

㉠,㉡,㉢에서 공통범위를 구하면

$1 < x < 3$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = 3$

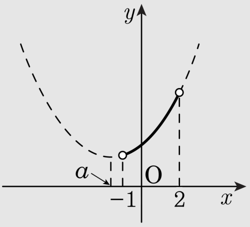
$\therefore\ \alpha+\beta = 4$

15. $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2ax + 2a + 3 > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?

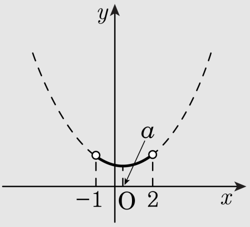
① 2 개　　② 3 개　　③ 4 개　　④ 5 개　　⑤ 6 개

해설

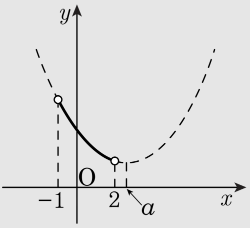
$f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ 이라 하면
$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 2a + 3$



$-1 < x < 2$ 에서
부등식 $f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면
(i)$a < -1$ 일 때,
다음 그림에서 $f(-1) > 0$
$4a + 4 > 0 \quad \therefore \ a > -1$
그런데 $a < -1$ 이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 없다.
(ii) $-1 \le a < 2$ 일 때,



다음 그림에서 $f(a) > 0$
$-a^2 + 2a + 3 > 0$ 에서
$(a+1)(a-3) < 0$
$\therefore \ -1 < a < 3$
그런데 $-1 \le a < 2$ 이므로 $-1 < a < 2$
그런데 $a = -1$ 인 경우 $f(a) = 0$ 이어도
$-1 < x < 2$ 에서는 $f(x) > 0$ 이므로 성립한다.
따라서 $-1 \le a < 2$



(iii) $a \ge 2$ 일 때, 다음 그림에서

$f(2) > 0 \ -2a + 7 > 0 \quad \therefore \ a < \frac{7}{2}$

그런데 $a \ge 2$ 이므로 $2 \le a < \frac{7}{2}$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는

$-1 \le a < \frac{7}{2}$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 으로 5개다.