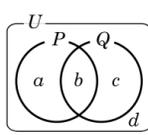


1. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ a 와 c

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$ 이면 $x \in Q$
 P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

2. 두 명제 ‘겨울이 오면 춥다.’ ‘눈이 오지 않으면 춥지 않다.’가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은?

- ① 추우면 눈이 온다.
- ② 눈이 오면 겨울이 온다.
- ③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 ‘눈이 오면 겨울이 온다’는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

3. 다음 ()안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 ()조건이다.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

4. 두 조건 $p : 0 < x < 3$, $q : -1 < x < 2$ 에 대하여 ' $\sim p$ 또는 q ' 의 부정은?

① $0 < x < 2$

② $-1 < x < 3$

③ $x \leq -1$ 또는 $x > 0$

④ $-1 \leq x < 3$

⑤ $2 \leq x < 3$

해설

' $\sim p$ 또는 q ' 의 부정은 ' p 이고 $\sim q$ ' 이므로
 $p : 0 < x < 3, \sim q : x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$ 에서



따라서, ' $\sim p$ 또는 q ' 의 부정은 $2 \leq x < 3$ 이다.

5. 네 조건 $p: x > 0, q: y > 0, r: x < 0, s: y < 0$ 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R, S 라 할 때, 조건 $xy > 0$ 을 만족하는 집합은?

① $(P \cap Q) \cup (R^c \cap S^c)$

② $(P \cap Q) \cap (R \cap S)$

③ $(P \cap Q) \cup (R \cap S)$

④ $(P \cup Q) \cap (R \cup S)$

⑤ $(P \cup Q) \cap (R \cup S)^c$

해설

$p: x > 0, q: y > 0, r: x < 0, s: y < 0$ 일 때
 $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0, y > 0)$ 또는 $(x < 0, y < 0)$
따라서, 주어진 조건을 만족하는 집합은
 $(P \cap Q) \cup (R \cap S)$

6. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \emptyset$ ③ $Q \subset P$
④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$$\sim p \rightarrow \sim q \Rightarrow P^c \subset Q^c \Rightarrow Q \subset P$$

7. 양수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.'가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
' $x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.'가 참이므로
 $a - a^2 + 2 = 0$, $a^2 - a - 2 = 0$
 $(a + 1)(a - 2) = 0$
 $\therefore a = -1$ 또는 $a = 2$
 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

8. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

① $r \Rightarrow p$

② $\sim p \Rightarrow \sim s$

③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$

⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

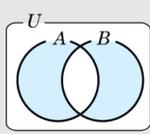
$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

9. 다음 증에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

- ① $A = B$ ② $B \subset A$ ③ $A \subset B$
 ④ $A \cap B = \emptyset$ ⑤ $A \cap B = B$

해설



$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= B \cap A^c \\ &= B - A \end{aligned}$$

$\therefore A - B = \emptyset$
 그러므로 $A \subset B$

해설

$(A - B) \cup (B - A) = B - A$ 에서 $(A - B)$ 와 $(B - A)$ 는 서로소이므로 등식이 성립하려면 $A - B = \emptyset$ 가 되어야 한다. $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$

11. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
 q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
 s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
 q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
 $\therefore p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

13. 실수 a, b, c, x, y 에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

- (㉠) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- (㉡) $x^2 - x + 1 > 0$
- (㉢) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (㉣) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
- (㉤) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
- (㉥) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

- ① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

- (㉠) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, $a = b$ 일때 등호성립)
- (㉤) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ (단, $a = b = c$ 일때 등호성립)

14. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

15. 전체집합 U 의 임의의 부분집합을 A 라 하고 조건 p, q 를 만족시키는 집합을 P, Q 라 하자. $(A \cap P) \cup (A^c \cap Q) = (A \cap P) \cup Q$ 가 성립할 때 다음 중 참인 명제는?

① $\sim q \rightarrow p$

② $p \rightarrow q$

③ $p \leftrightarrow q$

④ $q \rightarrow p$

⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

집합 A 가 전체집합 U 의 임의의 부분집합이므로 $A = U$ 라 놓으면, 좌변 : $(U \cap P) \cup (\emptyset \cap Q) = P \cup \emptyset = P$
우변 : $(U \cap P) \cup Q = P \cup Q \therefore P = P \cup Q$ 이므로 $Q \subset P$
 $\therefore q \rightarrow p$ 는 참이다.

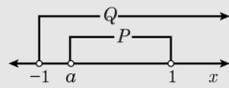
16. 실수 x 에 대하여 두 조건 $p : a \leq x \leq 1$, $q : x \geq -1$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

- ① $a > 1$ ② $a \leq 1$ ③ $-1 \leq a \leq 1$
 ④ $a \geq -1$ ⑤ $a \leq -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

- (i) $a > 1$ 일 때, $P = \emptyset$ 이므로 $P \subset Q \therefore a > 1$
 (ii) $a \leq 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii)에서 $a \geq -1$

17. 두 조건 p, q 가 $p : |x| < a, q : |x-1| \geq 3$ 과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 양수 a 의 범위를 구하면?

- ① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$
 ④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

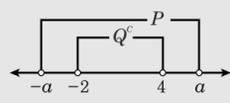
해설

$$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$$

$$P = \{x | -a < x < a\}$$

$$Q = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4\}$$

$$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$$



$$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2, a \geq 4$$

$$\therefore a \geq 4$$

18. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3, q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab, q : a = b$

③ $p : |a| < |b|, q : a < b$

④ $p : |x - 1| = 2, q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1, q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건

③ 아무런 조건관계가 아니다.

④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1, 3\}, Q = \emptyset$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.

⑤ 필요충분조건

19. x, y 는 양수이고 $\frac{2}{x} + \frac{8}{y} = 3$ 일 때, $x+y$ 의 최솟값은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x+y &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (x+y) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y}\right) (x+y) \\&= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} + 8\right) \\&= \frac{1}{3} \left(10 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y}\right) \geq \frac{1}{3} \left(10 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{8x}{y}}\right) \\&= \frac{1}{3}(10+8) = 6\end{aligned}$$

20. $x > 2$ 일 때, $x - 2 + \frac{4}{x-2}$ 의 최솟값은?

- ① 0 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

산술 기하평균의 관계에서

$$(x-2) + \frac{4}{(x-2)} \geq 2\sqrt{(x-2)\frac{4}{(x-2)}}$$

$$= 2\sqrt{4} = 4$$

∴ 최솟값 : 4