

1. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로

$$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10 \text{에서}$$

$$3x^2 - 12x - 15 = 0, 3(x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 5, -1$$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.

$$\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$$

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases} \text{가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 } a, b$$

의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

① $a = 1, b = -1$

② $a = 1, b = 1$

③ $a = 2, b = -1$

④ $a = 2, b = 0$

⑤ $a = -1, b = 2$

해설

f 가 일대일대응이 되려면

$y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y = ax + b$ 가

점 $(1, 1)$ 을 지나야 하므로

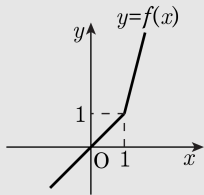
$$a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 직선 $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선 $y = ax + b$ 의 기울기도 양이어야 한다.

$$\therefore a > 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을

모두 만족시키는 것은 ③이다.



3. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\therefore (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$$

4. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 4 - 3x$ 에 대하여 $h \circ f = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x) = \frac{1}{3}(x + 1)$

② $h(x) = 3x - 1$

③ $h(x) = x - 3$

④ $h(x) = 3 - x$

⑤ $h(x) = x + 3$

해설

$$(h \circ f)(x) = 4 - 3x \text{에서}$$

$$f(x) = t \text{라 하면 } t = 3x - 1, 3x = t + 1$$

$$x = \frac{1}{3}(t + 1) \text{ 을 대입하면}$$

$$h(t) = 4 - 3 \times \frac{1}{3}(t + 1) = 3 - t$$

$$\therefore h(x) = 3 - x$$

5. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002

② 2004

③ 2006

④ 2008

⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$\vdots$

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(1) = 4$, $f^{-1}(6) = 2$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(1) = 4$ 이므로

$$a + b = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

$f^{-1}(6) = 2$ 에서 $f(2) = 6$ 이므로

$$2a + b = 6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 2$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8$$

7. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

㉠ $f(x) = x + 2$

㉡ $f(x) = -x - 1$

㉢ $f(x) = \frac{1}{x}$

㉤ $f(x) = 2x$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉤

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉤

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.

㉠ $(f \circ f)(x) = x + 4$

㉡ $(f \circ f)(x) = x$

㉢ $(f \circ f)(x) = x$

㉤ $(f \circ f)(x) = 4x$

따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉡, ㉢이다.

8. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

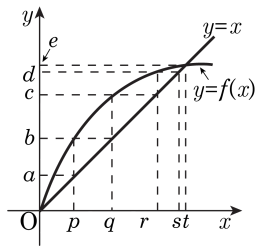
① p

② q

③ r

④ s

⑤ t



해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \dots \dots \textcircled{7}$$

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

$$\textcircled{7} \text{에서 } f(x) = r$$

$$\therefore r = c \text{ 에서 } f(x) = r = c$$

$$\therefore x = q$$

9. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 이고 $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 에 대하여

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로

$$g^{-1} \circ h = f \circ f, h = g \circ f \circ f$$

$$\therefore h(x) = g(f(f(x)))$$

$$= g(f(x + 4))$$

$$= g((x + 4) + 4)$$

$$= g(x + 8)$$

$$= -2(x + 8) + 3 = -2x - 13$$

$$h^{-1}(5) = a \text{ 라고 하면 } h(a) = 5$$

$$-2a - 13 = 5, -2a = 18$$

$$\therefore a = -9$$

$$\therefore h^{-1}(5) = -9$$

10. 두 함수 $f(x) = ax + b (a \neq 0)$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f^{-1})(3x - 1) = 2x + 1$ 이 성립할 때, $f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ 이므로

준식은 $(f \circ g)^{-1}(3x - 1) = 2x + 1$ 이다.

$(f \circ g)(2x + 1) = 3x - 1$ 에서

$f(g(2x + 1)) = 3x - 1$, $f(2x + 3) = 3x - 1$

$2ax + 3a + b = 3x - 1$ 에서 $a = \frac{3}{2}$

$3a + b = -1$ 에서 $b = -\frac{11}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$

$f^{-1}(2) = k$ 라 하면 $f(k) = \frac{3}{2}k - \frac{11}{2} = 2$

$\therefore k = 5$