1. $x^2+y^2+2ax-4ay+4a^2+2a-4=0$ 이 나타내는 자취의 최소 면적은?

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

해설

준식 $= x^2+2ax+y^2-4ay+4a^2+2a-4=0$

$\rightarrow (x+a)^2+(y-2a)^2 = a^2-2a+4$

그러므로 준식은 중심 $(-a,\ 2a)$ 이고

반지름이 $\sqrt{a^2-2a+4}$ 이다.

$\therefore$ 면적 $S = \pi(\sqrt{a^2-2a+4})^2$

$= \pi(a^2-2a+4) = \pi(a-1)^2+3\pi$

$\therefore\ a=1$ 일 때 최소 면적 : 3π

2. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x+8y-k=0$ 의 공통접선이 모두 1 개가 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=(\sqrt{25+k})^2$
공통접선의 개수가 1 개가 되려면 두 원이 내접해야 한다. 내접할 때는 두 원의 중심사이의 거리가 두 원의 반지름의 차와 같을 때이다.

$\therefore \sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25+k}-1$

$\Rightarrow 25+k=6^2$

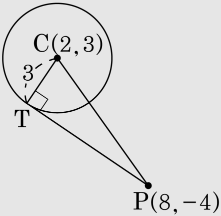
$\therefore k=11$

3. 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 밖의 한 점 $P(8,-4)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{19}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ $3\sqrt{19}$ ④ $4\sqrt{19}$ ⑤ $5\sqrt{19}$

해설

다음 그림과 같이 원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(8,-4)$ 에서
원 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 에 접선을 그어 그 접점을 T, 이 원의 중심을 C 라고 하면 $\triangle\mathrm{PTC}$ 는 $\angle\mathrm{PTC}=90°$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여



$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2$
$=\left\{(8-2)^2+(-4-3)^2\right\}-3^2=76$

$\overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

4. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이2 와 같다.

따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|a-1|=10$

$a-1=\pm 10$

$a>0$ 이므로 $a=11$

5. $a, b, c \in R$ 일 때, 조건 $a = b = c$ 의 부정을 바르게 말한 것은?

① a, b, c 는 모두 다르다.

② a, b, c 는 모두 다르지 않다.

③ a, b, c 중에는 같은 수가 있다.

④ a, b, c 중에는 0 이 아닌 수가 있다.

⑤ a, b, c 중에는 다른 두 수가 있다.

해설

① : $a = b = c \Rightarrow a = b$ 이고, $b = c$ 이고, $c = a$ 이다.
부정 : $a \neq b$ 또는 $b \neq c$ 또는 $c \neq a \Rightarrow a, b, c$ 중에는 다른 두 수가 있다.

6. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 P, Q, R 이라 할 때, $P-Q=R$ 을 만족한다. 다음 <보기> 중 항상 참인 명제를 <u>모두</u> 고른 것은?

보기

㉠ $r \rightarrow \sim q$	㉡ $r \rightarrow p$	㉢ $r \rightarrow q$
㉣ $\sim r \rightarrow \sim p$	㉤ $p \rightarrow q$	

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉤
④ ㉢, ㉣, ㉤ ⑤ ㉡, ㉣, ㉤

해설

$P-Q=R$
따라서, $R \subset P$ 이고 집합간의 관계를 살펴보면
$Q=R^c, R=Q^c$ 이 된다.
이를 명제로 표현하면 $r \rightarrow p, q \rightarrow \sim r, r \rightarrow \sim q$ 이므로 참인 명제는 ㉠, ㉡이다.

7. 두 명제 $p \rightarrow q$와 $r \rightarrow \sim q$가 모두 참일 때, 다음 명제 중 반드시 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $\sim q \rightarrow \sim p$	㉡ $r \rightarrow \sim p$	㉢ $r \rightarrow p$
㉣ $p \rightarrow r$	㉤ $\sim q \rightarrow p$	

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$p \rightarrow q$와 $r \rightarrow \sim q$가 참이면 그 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$, $q \rightarrow \sim r$이 참
$p \rightarrow q \rightarrow \sim r$이므로 $p \rightarrow \sim r$가 참이고 그 대우인 $r \rightarrow \sim p$가 참

8. 자연수 n에 대하여 'n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 <u>틀린</u> 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 (①)를 구하여 보면 n이 (②)이면 n^2 도 (②)이다. 이 때 n이 (②)이므로 $n=$ (③) (k 는 0 또는 자연수)
이 때 $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$
$\therefore n^2$은 (②)이다. 따라서, (①)가 (④)이므로 주어진 명제는 (⑤)이다.

① 대우　　② 홀수　　③ $2k+1$

④ 거짓　　⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

9. 다음 부등식 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $3^{40} > 2^{60}$	㉡ $3^{200} > 6^{150}$
㉢ $5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\dfrac{3^{40}}{2^{60}} = \dfrac{(3^2)^{20}}{(2^3)^{20}} = \left(\dfrac{9}{8}\right)^{20} > 1$

$\therefore\ 3^{40} > 2^{60}$

㉡ $\dfrac{3^{200}}{6^{150}} = \dfrac{(3^4)^{50}}{(6^3)^{50}} = \dfrac{(3^4)^{50}}{(2^3 \cdot 3^3)^{50}} = \left(\dfrac{3}{8}\right)^{50} < 1$

$\therefore\ 3^{200} < 6^{150}$

㉢ $\dfrac{5^{10}}{2^{30}} = \dfrac{5^{10}}{(2^3)^{10}} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} < 1 \quad \therefore\ 5^{10} < 2^{30}$

$\dfrac{2^{30}}{3^{20}} = \dfrac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10} < 1 \quad \therefore\ 2^{30} < 3^{20}$

$\therefore\ 5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

10. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

ab 와 $\frac{4}{ab}$ 가 양수이므로

$$ab + \frac{4}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 4$$

$$\therefore ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 4 + 5 = 9$$

11. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때, $\dfrac{2b}{a} + \dfrac{2c}{b} + \dfrac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore\ \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

12. 두 점 A(−2, 0), B(2, 0) 에서의 거리의 비가 3 : 1 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, △ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

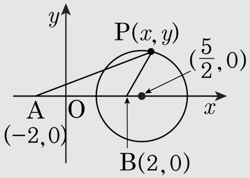
$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$
$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$
$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로
$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$
따라서, $(x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$
$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$
$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$
$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

13. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$　　② $2\sqrt{11}$　　③ $3\sqrt{11}$　　④ $4\sqrt{11}$　　⑤ $5\sqrt{11}$

해설

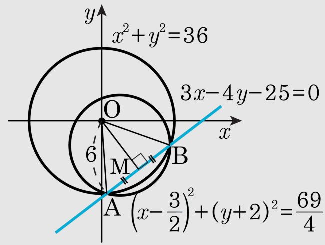
두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-36-(x^2+y^2-3x+4y-11)=0$

$\therefore 3x-4y-25=0 \cdots\cdots ㉠$

$x^2+y^2-3x+4y-11=0$에서

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{69}{4}$$



이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

원 $x^2+y^2=36$의 중심 $(0,0)$과 직선 ㉠사이의 거리 $\overline{OM}$은

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$$

원 $x^2+y^2=36$의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AM}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

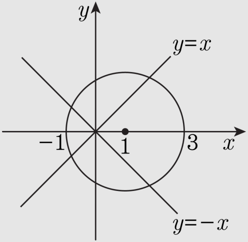
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{11}$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해의 개수를 구하면?

① 없다. ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$



$\therefore\ (x-1)^2 + y^2 = 2^2$

즉, 해는 4 개이다.

15. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(1,\ 0)$으로 부터의 거리의 비가 $3\ :\ 1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{\mathrm{AP}}\ :\ \overline{\mathrm{BP}} = 3\ :\ 1$이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 3\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}^2 = 9\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면

$(x+3)^2 + y^2 = 9\left(x-1)^2 + y^2\right\}$

$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

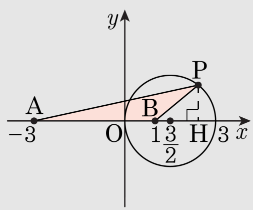
따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선

의 발을

H라 하면



$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{PH}}$

이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$이고 $\overline{\mathrm{PH}}$

의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$

16. 좌표평면에서 한 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동하였더니 점 A와 일치하였다. 이 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

점 $\mathrm{A}(-1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $(-1 + a, 3 + b)$가 되고 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 $(3 + b, -1 + a)$ 가 된다.

$(3 + b, -1 + a) = (-1, 3)$

$3 + b = -1,\ -1 + a = 3$

$a = 4,\ \ b = -4$

$\therefore ab = -16$

17. 두 점 $\mathrm{A}(4,1), \mathrm{B}(5,1)$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 9 ⑤ $\frac{33}{2}$

해설

점 $\mathrm{A}(4,1)$의 대칭점을 $\mathrm{C}(a,b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점

$\mathrm{M}\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$이 직선 $x-y+1=0$위에 있으므로 대입하면

$\frac{a+4}{2}-\frac{b+1}{2}+1=0$

$\therefore a-b+5=0 \quad \cdots ①$

또 직선 AC는 직선 $x-y+1=0$에 수직이므로

$\frac{b'-1}{a-4}\times 1=-1$

$\therefore a+b-5=0 \quad \cdots ②$

①, ②를 연립하면 $a=0,\ b=5$

$\therefore \mathrm{C}(0,5)$

같은 방법으로 점 $\mathrm{B}(5,1)$의 대칭점 $\mathrm{D}(0,6)$이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 5\times 5-\frac{1}{2}\times 4\times 4=\frac{9}{2}$

18. 다음 중 <u>틀린</u> 것은?

① $a^2+b^2=0$은 $a=b=0$이기 위한 필요조건이다.

② $xy \le 1$ 또는 $x+y \le 2$는 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x=3$은 $x^2-x-6=0$이기 위한 충분조건이다.

④ a, b, c가 실수일 때, $ac=bc$는 $a=b$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $x+y$가 유리수인 것은 x, y 모두가 유리수이기 위한 필요조건이다.

해설

① $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$ (필요충분조건)
※ 이 경우 필요충분조건이 된다는 것은 서로가 서로에게 충분조건도 되고 필요조건도 되는 것이므로 틀린 것이 아니다.
② 대우 : $x>1, y>1 \Rightarrow xy>1, x+y>2$ (참)
이 : $xy>1, x+y>2 \nRightarrow x>1, y>1$ (거짓) (반례 : $x=10$, $y=0.5$)
대우가 참, 이가 거짓이므로 주어진 명제는 참이고 그 역은 거짓이다.
∴ 충분조건

19. $0 < a < b,\ a+b=1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$

④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-1^2 = a+2\sqrt{ab}+b-1$

$= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2-(\sqrt{b-a})^2 = 1-b+a$

$= (a+b)-b+a$

$= 2a > 0$

$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2-(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$

$= b-a-(b-2\sqrt{ab}+a)$

$= 2\sqrt{ab}-2a$

$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$

$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

20. 다음은 "실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다"는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면
b^2-ac (가) 0 , c^2-ab (가) 0 , a^2-bc (가) 0
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ (나) 0
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ (나) $0\cdots$ ㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$(다)$0\cdots$ ㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

① $<$, $<$, $\geq$　② $<$, $<$, $>$　③ $<$, $>$, $<$
④ $\geq$, $\geq$, $\leq$　⑤ $\geq$, $\leq$, $\geq$

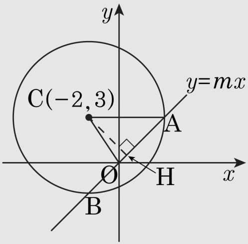
해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면
$b^2-ac<0$, $c^2-ab<0$, $a^2-bc<0$ (가정)
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac<0$
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}<0\cdots$ ㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0\cdots$ ㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

21. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 C(−2, 3) 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\triangle$CAH 에서 $\overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$
$= 25 - \overline{CH}^2$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$가 최소이다.

$\triangle$COH 에서 $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$

$\overline{CH}$가 최대가 되기 위해서는

$\overline{CH} = \overline{CO}$ ($\overline{OH} = 0$) 일 때이므로

$\overline{CO} \perp \overline{AB}$

직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$