1. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 에 직선 $y=mx$ 가 접하도록 상수 m 의 값을 정할 때, 모든 m 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$ ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ $\frac{12}{5}$

해설

$x^2+y^2+6x-4y+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=4$
이것은 중심이 $(-3,\ 2)$,
반지름의 길이가 2 인 원이다.
이 원에 직선 $y=mx$ 가 접하므로
원의 중심 $(-3, 2)$ 와 직선 $mx-y=0$ 사이의
거리는 반지름의 길이인 2 와 같다.
즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$
$|-3m-2|=2\sqrt{m^2+1}\cdots$ ㉠
㉠ 의 양변을 제곱하여 정리하면
$5m^2+12m=0 \quad \therefore\ m=0,\ -\frac{12}{5}$
따라서 구하는 모든 m 의 값의 합은 $-\frac{12}{5}$ 이다.

2. 점$(2,\ 1)$ 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 $(2,\ 1)$ 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로
$r=\dfrac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

3. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$과 직선 $3x+4y-a=0$이 서로 접할 때, a의 값을 구하면?

① 3 또는 20 ② 3 또는 23 ③ 2 또는 18

④ 2 또는 25 ⑤ 4 또는 30

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$

원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리

d 가 2이면 접하므로

$$d=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm 10$

따라서, $a=3$ 또는 23

4. 원 $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ 에 의하여 잘리는 x 축 위의 선분의 길이를 구하면?

① 0.5　　② 1.0　　③ 1.5　　④ 2.0　　⑤ 2.5

해설

원의 방정식을 정리하면, $(x+2)^2+(y-1)^2=2$

이 원이 x 축과 만나는 점은 $y=0$ 을 대입하여 구할 수 있다.

$\Rightarrow \quad (x+2)^2+1=2$

$\Rightarrow \quad x=-1,\ -3$

$\therefore \quad x$ 축 위의 선분의 길이는 2

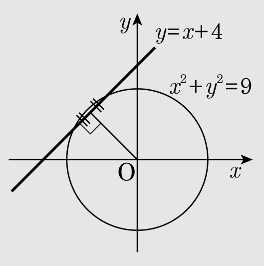
5. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

6. $x^2+y^2=1$과 직선 $y=ax+1$과의 교점을 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 1이 되는 양수 a의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

해설

원점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 다음의 그림에서

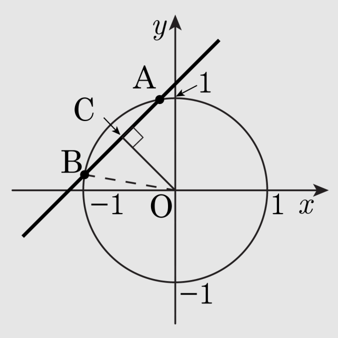
$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

($\because$ 피타고라스의 정리) 즉, O에서 직선 $y=ax+1$에 이르는 거리 d가

$$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ 3a^2+3=4\ ,\ a^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



7. 점 $A(0,\ a)$ 에서 원 $x^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1　② $-\sqrt{2}$　③ 2　④ $3\sqrt{2}$　⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은
$y=mx+a$ 이다. 원의 중심 $(0,\ 2)$ 에서 직선 $mx-y+a=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\frac{|m\times 0-2+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$

$\therefore\ |a-2|=3\sqrt{m^2+1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2-(a^2-4a-5)=0$ 이 방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$ 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$m_1m_2=-\frac{1}{9}(a^2-4a-5)=-1$, $a^2-4a-14=0$

$\therefore\ a=2\pm 3\sqrt{2}$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

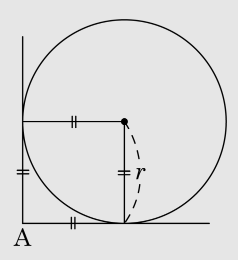
$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=4$

8. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$
$\therefore\ r=3$

9. 다음 중 직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 직선의 식은?

① $y = -3x - 2$ ② $y = 3x + 2$ ③ $y = -3x + 2$
④ $y = -3x + 4$ ⑤ $y = 3x - 4$

해설

직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로
2 만큼 평행이동 시킨 직선은
$y - (-2) = -3x$
$\therefore y = -3x - 2$

10. 원 $x^2+y^2-2x+6y+1=0$ 을 x 축 방향으로 a , y 축방향으로 b 만큼 평행이동하여 원점이 원의 중심이 되었다. 이때, 이와 같은 이동에 의하여 점 (2, 5) 은 어느 점으로 옮겨지는가?

① (0, 9) ② (1, 3) ③ (1, 8)

④ (3, 5) ⑤ (4, 4)

해설

$x^2+y^2-2x+6y+1=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2+(y+3)^2=9 \rightarrow$ 중심 : $(1,-3)$

$\therefore$ 원점이 중심이 되려면

x 축으로 -1, y 축으로 3 만큼 평행 이동해야 한다.

$\Rightarrow \quad (2-1, 5+3) \quad \rightarrow \quad (1,8)$

11. 직선 $2x-y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행 이동한 식이 $2x-y-4=0$ 이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2(x-3)-(y-a)+1=0$

$2x-y-5+a=0$

$\therefore\ a=1$

12. 직선 $2x-y+3=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x+2y+3=0$ ② $x+4y+6=0$

③ $2x+y+2=0$ ④ $2x+4y+6=0$

⑤ $3x+2y+1=0$

해설

직선 $2x-y+3=0$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{\text{직선 } x=y\text{에 대하여}}$ 직선 $2y-x+3=0$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}}$ 직선 $2y-(-x)+3=0$,

즉 $x+2y+3=0$

13. 점 $(3, 4)$를 y축, x축, 원점에 대하여 대칭이동하는 것을 순서에 관계 없이 임의로 반복할 때, 좌표평면 위에 나타나지 않는 점은?

① $(3, -4)$ ② $(-3, 4)$ ③ $(-3, -4)$
④ $(4, 3)$ ⑤ $(3, 4)$

해설
x축대칭은 y의 부호를 반대로, y축대칭은 x의 부호를 반대로, 원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.

14. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로
$-k = -3$
$\therefore k = 3$

15. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a,b,c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
이 때, 이 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고
반지름의 길이가 2 이므로
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=4$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+6y+6=0$
$\therefore a=2,\ b=-6,\ c=6$
따라서, 구하는 $a,\ b,\ c$ 의 값의 합은
$2+(-6)+6=2$

16. 원 $x^2+y^2-6x+8=0$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=4$
② $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
③ $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
④ $(x-1)^2+(y-2)^2=1$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

해설

원 $x^2+y^2-6x+8=0$은 중심이 $(3,\ 0)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
원의 중심 $(3,\ 0)$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여
대칭이동한 점을 $(a,\ b)$ 라 하면
$\frac{3+a}{2}=2,\ \frac{0+b}{2}=1$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는
그대로이므로 구하는 원은 중심이 $(1,\ 2)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=1$

17. 직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여
대칭이동하면 $-2x+3y-1=0$
이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$-2y+3x-1=0$
$\therefore 3x-2y-1=0$
이 직선이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 원의 중심 $(1, a)$ 를 지난다.
즉, $3-2a-1=0, 2a=2 \quad \therefore a=1$

18. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2 - ax + 2 \neq 0$에서 $q \rightarrow p$가 참일 때, a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.
$x-2=0 \Rightarrow x^2 - ax + 2 = 0 \therefore a = 3$

19. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7　② -6　③ -5　④ -4　⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$는 $\sim q \rightarrow \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \rightarrow \ a \leq -1$

2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \rightarrow \ a \geq -5$

$\therefore \ -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

20. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
'$x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.' 가 참이므로
$a - a^2 + 2 = 0,\ a^2 - a - 2 = 0$
$(a+1)(a-2) = 0$
$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 2$
$a > 0$ 이므로 $a = 2$

21. a, b가 실수일 때, p가 q이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① p : $a^2+b^2=0$, q : $|a|+|b|=0$

② p : $a=0$, q : $|a+b|=|a-b|$

③ p : $|a|=|b|$, q : $a^2=b^2$

④ p : $a+b>0,\ ab>0$, q : $a>0,\ b>0$

⑤ p : $|a|+|b|>|a+b|$, q : $ab<0$

해설

q : $|a+b|=|a-b| \rightarrow a=0$ 또는 $b=0$

22. x, y가 실수일 때, $|x| + |y| = |x + y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$ ② $xy > 0$ ③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$ ⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore$ $|xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

23. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2+y^2=0$ 이기 위한 필요충분조건을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $xy=0$	㉡ $x=y=0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=0$	㉣ $(x+y)(x-y)=0$
㉤ $(x+y)^2+(x-y)^2=0$	㉥ $\lvert x+y\rvert=\lvert x-y\rvert$

① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉡, ㉣, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉥ ④ ㉡, ㉤, ㉥ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

$x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$
㉠ $x=0$ 또는 $y=0$
㉡, ㉢ $x=y=0$
㉣ $x=-y$ 또는 $x=y$
㉤ $x+y=0, x-y=0 \Leftrightarrow x=y=0$
㉥ $x+y=x-y$ 또는 $x+y=-x+y$
$\Leftrightarrow x=0$ 또는 $y=0$
따라서, 보기중 $x^2+y^2=0$ 이기 위한 필요충분조건은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

24. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 다음이 성립한다.

(가) p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
(나) q 는 r 이기 위한 필요조건이다.
(다) r 는 p 이기 위한 필요조건이다.
(라) s 는 p 이기 위한 충분조건이다.
이때, p 는 r 이기 위한 (㉠) 조건이고, r 는 s 이기 위한 (㉡) 조건이다.

㉠, ㉡에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

① 필요, 충분 ② 충분, 필요
③ 필요충분, 충분 ④ 필요, 필요충분
⑤ 필요충분, 필요

해설

(가) $p \Leftrightarrow q$, (나) $r \Rightarrow q$
(다) $p \Rightarrow r$, (라) $s \Rightarrow p$
따라서, $p \Leftrightarrow r$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요충분조건이고, $s \Rightarrow r$ 이지만 $r \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없으므로 r 는 s 이기 위한 필요조건이다.

25. 조건 p 는 조건 q 이기 위한 충분조건이고, 조건 p 는 조건 r 이기 위한 필요조건이다. 이 때, [보기] 의 명제 중 반드시 참인 명제를 모두 고르면?

보기

ㄱ $p \to r$　　ㄴ $\sim q \to \sim r$

ㄷ $r \to q$　　ㄹ $\sim r \to q$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

$p \to q\ (T) \leftrightarrow \sim q \to \sim p\ (T) \cdots$ ㄱ

$r \to p\ (T) \leftrightarrow \sim p \to \sim r\ (T) \cdots$ ㄴ

ㄱ, ㄴ에서 $\sim q \to \sim r\ (T) \leftrightarrow r \to q\ (T)$

26. 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, r 은 s 이기 위한 필요조건, s 는 q 이기 위한 필요조건일 때, q 는 s 이기 위한 (가) 조건이고, s 는 p 이기 위한 (나) 조건이다. 이때, (가), (나) 에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

① 필요, 필요충분　② 필요충분, 충분
③ 필요, 충분　④ 필요충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q$ ……㉠
같은 방법으로 $r \Rightarrow q$ ……㉡
$s \Rightarrow r$ ……㉢
$q \Rightarrow s$ ……㉣
㉣에서 $q \Rightarrow s$ 이고 ㉡, ㉢에서 $s \Rightarrow q$ 이므로 q 는 s 이기 위한 필요충분조건(가)
또, $p \Rightarrow q \Rightarrow s$ 이므로 s 는 p 이기 위한 필요조건(나)

27. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 다른 한 원은
서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$ 이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$가
직선 $y=ax+b\cdots$①에 대하여
대칭이므로 직선 ①은 점 $(-2,1)$과 점 $(0,0)$ 을 잇는 선분을 수직이등분한다.
따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 은 직선 ① 위에 있고
기울기의 곱은 -1 이다.
$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$
$\therefore\ a=2,\ b=\frac{5}{2}$
따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$

28. 두 점 $A(4,1), B(5,1)$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 9 ⑤ $\frac{33}{2}$

해설

점 $A(4,1)$의 대칭점을 $C(a,b)$라 하면 $\overline{AC}$의 중점

$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$이 직선 $x-y+1=0$위에 있으므로 대입하면

$\frac{a+4}{2} - \frac{b+1}{2} + 1 = 0$

$\therefore a-b+5=0 \cdots ①$

또 직선 AC는 직선 $x-y+1=0$에 수직이므로

$\frac{b'-1}{a-4} \times 1 = -1$

$\therefore a+b-5=0 \cdots ②$

①, ②를 연립하면 $a=0,\ b=5$

$\therefore C(0,5)$

같은 방법으로 점 $B(5,1)$의 대칭점 $D(0,6)$이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{9}{2}$

29. 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여 점 $(a,\ b)$ 와 대칭인 점의 좌표를$(\alpha,\ \beta)$ 라 한다. 점 $(a,\ b)$ 가 직선 $y=2x+1$ 위를 움직이면 점 $(\alpha,\ \beta)$ 가 움직이는 도형은?

① $y=x-7$　② $y=x+7$　③ $y=2x+7$
④ $y=2x-7$　⑤ $y=3x+7$

해설

점 $(2,\ 1)$ 에 대하여 점 $(a,\ b)$ 와 대칭인
점이 $(\alpha,\ \beta)$ 이므로 $\dfrac{a+\alpha}{2}=2$
$\therefore\ a=4-\alpha$
$\dfrac{b+\beta}{2}=1$
$\therefore\ b=2-\beta$
한편 점 $(a,\ b)$ 가
직선 $y=2x+1$ 위를 움직이므로
$b=2a+1$ 이고 $a=4-\alpha$ $b=2-\beta$ 를 대입하여 정리하면
$\beta=2\alpha-7$
$\therefore\ y=2x-7$