

1. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$ 이 서로 접할 때, a 의 값을 구하면?

① 3 또는 20

② 3 또는 23

③ 2 또는 18

④ 2 또는 25

⑤ 4 또는 30

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리

d 가 2 이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$$

따라서, $a = 3$ 또는 23

2. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 은?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

접선이므로 원 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$$

3. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ 에 직선 $y = mx$ 가 접하도록 상수 m 의 값을 정할 때, 모든 m 의 값의 합은?

- ① $-\frac{12}{5}$ ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ $\frac{12}{5}$

해설

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

이것은 중심이 $(-3, 2)$,

반지름의 길이가 2 인 원이다.

이 원에 직선 $y = mx$ 가 접하므로

원의 중심 $(-3, 2)$ 와 직선 $mx - y = 0$ 사이의

거리는 반지름의 길이인 2 와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|-3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$|-3m - 2| = 2\sqrt{m^2 + 1} \cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$$5m^2 + 12m = 0 \quad \therefore m = 0, -\frac{12}{5}$$

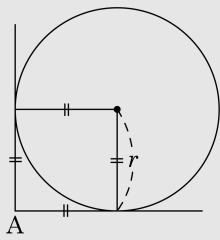
따라서 구하는 모든 m 의 값의 합은 $-\frac{12}{5}$ 이다.

4. 좌표평면 위에 원 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1)이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림 처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$$\therefore \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2}r$$

$$\therefore r = 3$$

5. 점 A(0, a) 에서 원 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

- ① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은 $y = mx + a$ 이다. 원의 중심 (0, 2) 에서 직선 $mx - y + a = 0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\frac{|m \times 0 - 2 + a|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 3$

$\therefore |a - 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2 - (a^2 - 4a + 5) = 0$ 이 방정식의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$m_1 m_2 = -\frac{1}{9}(a^2 - 4a - 5) = -1, a^2 - 4a - 14 = 0$

$\therefore a = 2 \pm 3\sqrt{2}$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은 $(2 + 3\sqrt{2}) + (2 - 3\sqrt{2}) = 4$