

1. 원  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$  에 의하여 잘리는  $x$  축 위의 선분의 길이를 구하면?

①  $\sqrt{2}$

②  $\sqrt{3}$

③ 2

④  $2\sqrt{2}$

⑤  $2\sqrt{3}$

해설

원이  $x$  축과 만나는 점은  $y = 0$  을 대입하여 계산한다.

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, 3$$

$\therefore x$  축 위의 선분의 길이 : 2

2. 임의의 실수  $k$ 에 대하여 원  $x^2 + y^2 - 2 + k(x - 2y + 1) = 0$ 이 항상 지나는 두 점 사이의 거리를 구하면?

①  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

②  $\frac{5\sqrt{5}}{5}$

③  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

④  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

⑤  $\frac{10\sqrt{5}}{5}$

해설

준식이  $k$ 에 관한 항등식이므로

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \dots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

$\textcircled{A}$ 에서  $x = 2y - 1$ ,  $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$(2y - 1)^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 5y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (5y + 1)(y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{5}, 1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{5}, 1$$

$$\therefore \text{두 점} : \left(-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right), (1, 1)$$

$\therefore$  두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(1 + \frac{7}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

3. 직선  $y = x + k$ 가 원  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 와 만나서 생기는 현의 길이가 8 일 때, 상수  $k$ 의 값은?

①  $2\sqrt{3}$

②  $\pm 2\sqrt{3}$

③  $3\sqrt{2}$

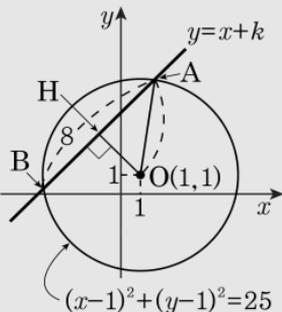
④  $-3\sqrt{2}$

⑤  $\pm 3\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심  $O(1,1)$ 에서 직선  $x - y + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$



직각삼각형 OHA에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \dots \text{㉠}$$

또 원의 중심  $O(1,1)$ 에서

직선  $x - y + k = 0$

사이의 거리가  $\overline{OH}$ 이므로

$$\overline{OH} = \frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3$$

$$\therefore k = \pm 3\sqrt{2}$$

4. 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  에서 원소의 개수가 3개인 부분집합 중 1은 포함하고, 3은 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답:                         개

▷ 정답: 3 개

#### 해설

주어진 조건을 만족하는 집합의 개수는 집합  $\{2, 4, 5\}$  의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 부분집합을 구하여 원소 1을 넣어주는 것과 같으므로 구하는 부분집합은 3개이다.

5. 집합  $A = \{1, 2, 3\}$  일 때, 원소 1 을 포함하는 집합  $A$  의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답:      개

▷ 정답: 4 개

해설

$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$

6. 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 홀수}\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 15는 반드시 포함하고, 소수는 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

- ① 1개      ② 2개      ③ 3개      ④ 4개      ⑤ 5개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 19\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 15는 반드시 포함하고, 소수 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19는 포함하지 않는 부분집합의 개수는  $2^{10-2-7} = 2^1 = 2$  (개)

7.  $a, b, c$ 가 실수일 때,  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요충분조건인 것은?

①  $p : a^2 + b^2 = 0, q : a = b = 0$

②  $p : a, b$ 는 짝수,  $q : a + b$ 는 짝수

③  $p : a = b, q : ac = bc$

④  $p : a - 1 = 0, q : a^2 - 1 = 0$

⑤  $p : ab > 0, q : |a + b| = |a| + |b|$

### 해설

$p$ 는  $q$ 이기 위한 필요충분조건이려면  $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ 가 모두 참이어야 한다.

①  $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$

②  $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$  (반례 :  $a = 1, b = 3$ )

③  $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$  (반례 :  $a = 1, b = 2, c = 0$ )

④  $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$  (반례 :  $a = -1$ )

⑤  $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$  (반례 :  $a = 0, b = 0$ )

8. 실수  $a, b$ 에 대하여  $ax + b = 0$ 이  $x$ 에 대한 항등식이 되기 위한 필요충분조건을 다음 중 보기에서 모두 고르면 ?

보기

㉠  $a^2 + b^2 = 0$

㉡  $ab = 0$

㉢  $a + bi = 0$

㉣  $a + b\sqrt{3} = 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$ax + b = 0$ 이  $x$ 에 대한 항등식  $\leftrightarrow a = 0, b = 0$

㉠  $a^2 + b^2 = 0 \leftrightarrow a^2 = 0, b^2 = 0 \leftrightarrow a = 0, b = 0$

㉡  $ab = 0 \leftrightarrow a = 0$  또는  $b = 0$

㉢  $a + bi = 0 \leftrightarrow a = 0, b = 0$

㉣ (반례)  $a = \sqrt{3}, b = -1 \Rightarrow a + b\sqrt{3} = 0$

$\therefore$  ㉠, ㉢

9. 두 실수  $x, y$  에 대하여  $x^2 + y^2 = 0$  이기 위한 필요충분조건을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠  $xy = 0$

㉡  $x = y = 0$

㉢  $|x| + |y| = 0$

㉣  $(x + y)(x - y) = 0$

㉤  $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 0$

㉥  $|x + y| = |x - y|$

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉡, ㉣, ㉤

③ ㉠, ㉢, ㉥

④ ㉡, ㉤, ㉥

⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

㉠  $x = 0$  또는  $y = 0$

㉡, ㉢  $x = y = 0$

㉣  $x = -y$  또는  $x = y$

㉤  $x + y = 0, x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

㉥  $x + y = x - y$  또는  $x + y = -x + y$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ 또는 } y = 0$$

따라서, 보기중  $x^2 + y^2 = 0$  이기 위한 필요충분조건은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

10. 두 원  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$  의 교점을 P, Q 라할 때, 선분 PQ의 길이를 최대로 하는 양수  $r$  의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

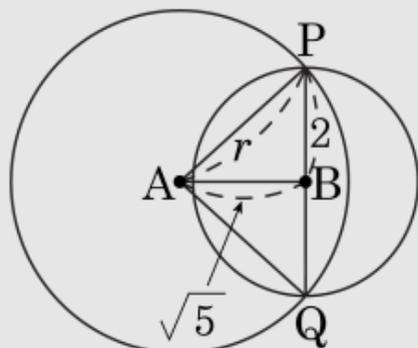
$$A : x^2 + y^2 = r^2, B : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

라고 하면

$\overline{PQ}$ 가 원 B의 지름일 때

$\overline{PQ}$ 의 길이는 최대가 된다.

$$\therefore r = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$$



11. 두 원  $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 와  $(x+2)^2 + y^2 = 24$ 의 공통현의 길이를 구하면?

①  $\sqrt{2}$

②  $2\sqrt{2}$

③  $3\sqrt{2}$

④  $4\sqrt{2}$

⑤  $5\sqrt{2}$

해설

두 원  $(x-1)^2 + y^2 = 9$ ,

$(x+2)^2 + y^2 = 24$

즉,  $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ ,

$x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$ 의 공통

현의 방정식은

$(x^2 + y^2 - 2x - 8) -$

$(x^2 + y^2 + 4x - 20) = 0$

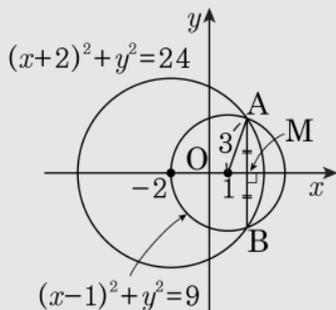
$-6x + 12 = 0 \quad \therefore x = 2$

$(x-1)^2 + y^2 = 9$ 의 중심  $(1, 0)$ 과  $x = 2$ 와의 거리  $d = 1$

따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은  $\overline{AB}$ 이고,

$\overline{AM} = \overline{BM}$ 이므로 공통현의 길이는

$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - 1} = 4\sqrt{2}$



12. 두 원  $x^2+y^2-36=0$ ,  $x^2+y^2-3x+4y-11=0$ 의 공통현의 길이는?

①  $\sqrt{11}$

②  $2\sqrt{11}$

③  $3\sqrt{11}$

④  $4\sqrt{11}$

⑤  $5\sqrt{11}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 36 -$$

$$(x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 25 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{69}{4}$$

이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면

원  $x^2 + y^2 = 36$ 의 중심 (0,0)과 직선  $\textcircled{7}$ 사이의 거리  $\overline{OM}$ 은

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

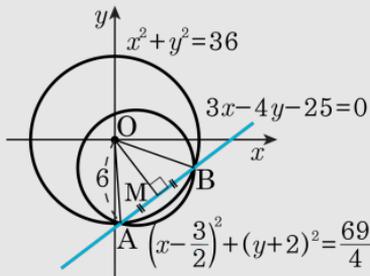
원  $x^2 + y^2 = 36$ 의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

따라서, 공통현의 길이  $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{11}$$



13. 자연수로 이루어진 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$  의 부분집합 중에서 원소  $n-1$  과,  $n$  을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 64 일 때,  $n$  의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

집합  $A$  의 원소의 개수가  $n$  개이므로

$$2^{n-2} = 64 = 2^6 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n - 2 = 6, n = 8$$

14. 집합  $A = \{x \mid 2 \leq x < a \text{인 자연수}\}$ 에 대하여 집합  $A$ 의 부분집합의 개수가 16개가 되기 위한 자연수  $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$2^{n(A)} = 16 = 2^4 \quad \therefore n(A) = 4$$

$$A = \{2, 3, 4, 5\} = \{x \mid 2 \leq x < 6 \text{인 자연수}\}$$

$$\therefore a = 6$$

15. 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } n \text{보다 작은 자연수}\}$  이고 집합  $B$  는  $A$  의 모든 부분 집합을 원소로 하는 집합이다. 집합  $B$  의 부분집합의 개수가 16 일 때, 자연수  $n$  의 값을 구하여라.

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2^k = 16 = 2^4 \quad \therefore k = 4$$

$B$  의 원소의 개수가 4 개 이므로, 집합  $A$  의 부분집합의 수는 4 개이다.

$$2^{(n \text{보다 작은 자연수 개수})} = 2^{n-1} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 3$$

16. 전체집합  $U = \{x|x\text{는 }20\text{이하의 소수}\}$  에 대하여  $A = \{2, 7, 11\}$ ,  $B = \{3, 7, 11, 17\}$  일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

①  $A \cap B = \{7, 11\}$

②  $A \cap B^c = \{2\}$

③  $A^c \cap B = \{3, 17\}$

④  $A^c \cup B^c = \{2, 3, 9, 13, 17, 19\}$

⑤  $A^c \cap B^c = \{5, 13, 19\}$

해설

$$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\},$$

$$A = \{2, 7, 11\}, B = \{3, 7, 11, 17\}$$

②  $A \cap B^c = A - B = \{2\}$

③  $A^c \cap B = B - A = \{3, 17\}$

④  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$

⑤  $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 13, 19\}$

17. 전체집합  $U$  의 두 부분집합  $A, B$  에 대하여 보기의 연산 과정 중 처음으로 잘못된 곳을 골라라.

보기

$$A^c - B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B - A = (A \cup B) - B$$

㉠

㉡

㉢

㉣

▶ 답:

▷ 정답: ㉣

해설

$B - A = (A \cup B) - A$  이다. 따라서 잘못된 곳은 ㉣  $B - A = (A \cup B) - B$  이다.

18. 전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 소수}\}$  에 대하여  $A = \{2, 7, 11\}$ ,  $B = \{3, 7, 11, 17\}$  일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

①  $A \cap B = \{7, 11\}$

②  $A \cap B^c = \{2\}$

③  $A^c \cap B = \{3, 17\}$

④  $A^c \cup B^c = \{2, 3, 9, 13, 17, 19\}$

⑤  $A^c \cap B^c = \{5, 13, 19\}$

해설

$$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\},$$

$$A = \{2, 7, 11\}, B = \{3, 7, 11, 17\}$$

②  $A \cap B^c = A - B = \{2\}$

③  $A^c \cap B = B - A = \{3, 17\}$

④  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$

⑤  $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 13, 19\}$