

1. 중심이 $y = 2x$ 위에 있고, 두 점 $(2, 2)$, $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

해설

중심이 $y = 2x$ 위에 있다고 했으므로

두 점 $(2, 2)$, $(1, 1)$ 을 지나는

원의 중심은 $(a, 2a)$ 로 나타낼 수 있다.

$(a, 2a)$ 를 중심으로 하는 원을 식으로 표현하면

$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$ 이다.

따라서 두 점 $(2, 2)$, $(1, 1)$ 은

$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$ 를 지나므로 대입했을 때 등식이 성립한다.

두 식을 연립하면, 두 점 $(2, 2)$, $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식이

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 임을 알 수 있다.

2. 두 점 A (0, 0), B (6, 0) 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

② $(x - 4)^2 + y^2 = 8$

③ $(x - 6)^2 + y^2 = 12$

④ $(x - 8)^2 + y^2 = 16$

⑤ $(x - 10)^2 + y^2 = 20$

해설

조건을 만족하는 점을 P (x, y) 라고 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + y^2}, \overline{BP} = \sqrt{(x - 6)^2 + y^2}$$

이때, $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 에서 $\overline{AP} = 2\overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 6)^2 + y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$$(x - 8)^2 + y^2 = 16$$

3. 두 원 $x^2 + y^2 = 2$ 과 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2$ 이 만나지 않을 때, 실수 a 의 값의 범위는 $a < p$ 또는 $a > q$ 이다. 이때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 2$, $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2$ 는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$ 이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0)$, (a, a) 이므로 중심거리는

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}|a|$$

따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면

$$\sqrt{2}|a| > \sqrt{2} + \sqrt{2}, |a| > 2$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

4. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 2

② 4

③ 8

④ 12

⑤ 16

해설

주어진 직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{4}(ab)^2 \quad \dots \text{㉠}$$

산술기하 조건에 의해 $a^2 + b^2 \geq 2ab$

즉, $a^2 + b^2 = 2ab$ 일 때 최소이다.

$$\text{㉠에 대입시키면, } 2ab = \frac{1}{4}(ab)^2$$

$$\therefore ab = 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 \text{ 의 최솟값은 } 2ab = 16$$

5. 원 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 과 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, a 의 값 중 정수들의 총합을 구하면?

① 7

② 9

③ 11

④ 13

⑤ 15

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 원 중심에서 직선까지 거리가 반지름보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow \frac{|3 \times 1 + 4 \times (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} < 1$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 - 25 < 0$$

$$\Rightarrow -4 < a < 6$$

$\therefore$ 정수 $a = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

모두 합하면 9

6. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 의하여 잘린 현 $\overline{PQ}$ 의 길이가 2일 때, k 의 값은?

① $\pm \sqrt{5}$

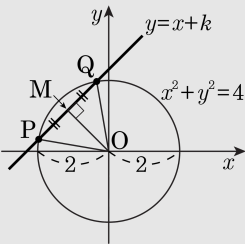
② $\pm \sqrt{6}$

③ $\pm \sqrt{7}$

④ $\pm 2\sqrt{2}$

⑤ ± 3

해설



$\overline{PQ} = 2$ 이므로 $\overline{PQ}$ 의 중점을 M이라 할 때, $\overline{PM} = 1$
 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP} = 2$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } \overline{OM} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PM}^2} \\ &= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

이때 원과 직선 $x - y + k = 0$

사이의 거리는 $\overline{OM}$ 의 길이와 같으므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}, |k| = \sqrt{6}, k = \pm \sqrt{6}$$

7. 직선 $3x - 4y - 12 = 0$ 에 수직이고 원 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

- ① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$
 ② $y = -2x - \frac{4}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{5}x - 1$
 ③ $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$
 ④ $y = -\frac{6}{5}x - \frac{2}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{7}x - \frac{9}{2}$
 ⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $y = -9x - 6$

해설

$3x - 4y - 12 = 0$ 에서

$$y = \frac{3}{4}x - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로

기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}x + b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

로 놓을 수 있다.

㉡에서 $4x + 3y - 3b = 0$ 이고,

원의 중심 $(-3, 2)$ 에서 이 직선까지의 거리가
반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-12 + 6 - 3b|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1, |3b + 6| = 5, 3b + 6 = \pm 5$$

$$3b = -1 \text{ 또는 } 3b = -11$$

$$\therefore b = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } b = -\frac{11}{3}$$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \text{ 또는 } y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$$

해설

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0 \text{ 이므로}$$

㉢을 이 식에 대입하여 정리하면

$$25x^2 + 6(17 - 4b)x + 9(b^2 - 4b + 12) = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \{3(17 - 4b)\}^2 - 25 \cdot 9(b^2 - 4b + 12) = 0$$

$$D = 0 \text{ 에서 } 9b^2 + 36b + 11 = 0,$$

$$(3b + 1)(3b + 11) = 0$$

$$\therefore b = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } b = -\frac{11}{3} \text{ 이것을 ㉢에 대입하면}$$

구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \text{ 또는 } y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$$

8. 점 A(0, a)에서 원 $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ 에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y = mx + a$ 로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서 접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$$(a - 3)^2 = 8(m^2 + 1)$$

$$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0, (a - 7)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

해설

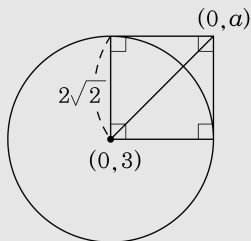
원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a - 3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$$a - 3 = \pm 4$$

$$\therefore a = 7 \text{ 또는 } a = -1$$

그런데 $a > 0$ 에서 $a = 7$



9. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

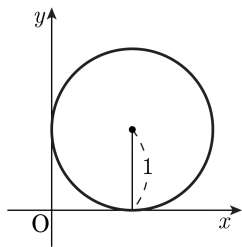
$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 (0, 4)이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 (0, 4) 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = 8 - 5 = 3$$

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k - 1 + k - 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$$

$$|2k - 3| = \sqrt{k^2 + 1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

11. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ 에 의하여 점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동했다고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

해설

점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동하려면 x 축 방향으로 +5, y 축 방향으로 +15만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a = 5$, $b = 15$

12. 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ 를 원 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5 \rightarrow \text{원의 중심} : (2, 3)$$

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow \text{원의 중심} : (-1, 5)$$

점 $(-1, 5)$ 는 점 $(2, 3)$ 을 x 축의 방향으로
 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.

따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로

-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$(x+3) + 3(y-2) + 2 = 0$$

$$\therefore x+3y-1=0 \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로

$$a=3, b=-1 \therefore a+b=2$$

13. 원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi + 2$

② $2\pi + 4$

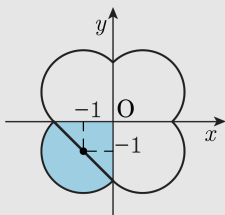
③ $2\pi + 8$

④ $4\pi + 8$

⑤ $8\pi + 8$

해설

원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \pi \times \sqrt{2}^2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \pi + 2$

따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로
 $4(\pi + 2) = 4\pi + 8$

14. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3, 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (-1, 2) &\xrightarrow{\text{원점대칭}} (1, -2) \xrightarrow{x\text{축으로 } a\text{만큼 평행이동}} (1 + a, -2) \\ &\xrightarrow{y\text{축으로 } b\text{만큼 평행이동}} (1 + a, -2 + b) \\ &\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2 + b, 1 + a) = (3, 2) \\ \therefore a = 1, b = 5 \end{aligned}$$

15. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 점 $(0, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $f(x, y) = 0$ 일 때, $f(x - a, y - b) = 0$ 은 x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 된다. 이 때, $a + b$ 의 값을 모두 구하면?

① 0, 2, 4

② 1, 4, 5

③ -2, 2, -6

④ 4, 5, 6

⑤ -1, 3, 4

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 점 $(0, 1)$ 에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은

$x^2 + (y - 2)^2 = 4$ 이다.

이 원을 x 축으로 a 만큼,

y 축으로 b 만큼 이동시킨 도형이

x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 되므로,

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{또는} \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

따라서 $a + b = 2$ 또는 -2 또는 -6

16. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$

② $x^2 + y^2 = 1$

③ $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}$

④ $(x + 1)^2 + y^2 = 3$

⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ 에서 $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ⑤이다.

17. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A = \{\emptyset\}$ 일 때, $n(A) = 1$

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 0$

③ $C = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(C) = 4$

④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = c$

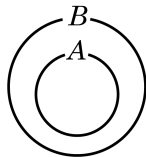
⑤ $n(\{0, 1, 2\}) = 3$

해설

② 집합 $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 1$

④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = 3 - 2 = 1$

18. 다음 중 두 집합 A , B 사이의 포함 관계가 아래 그림의 벤 다이어그램과 같이 나타나는 것을 모두 고르면?

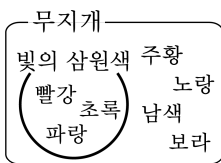


- ① $A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$
- ② $A = \{x \mid x \text{는 짝수}\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$
- ④ $A = \{x \mid x = 3 \times n, n = 1, 2, 9\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$
- ⑤ $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$

해설

- ① 포함 관계 없음
- ② $B \subset A$
- ③ $A \subset B$
- ④ 포함 관계 없음
- ⑤ $A \subset B$

19. 다음은 무지개 색상과 빛의 삼원색을 나타낸 것이다. 빛의 삼원색을 집합 A 라고 하자. $\{\text{파랑}, \textcircled{\text{가}}\} \subset A$ 일 때, $\textcircled{\text{가}}$ 이 될 수 있는 색을 모두 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 빨강

▷ 정답 : 초록

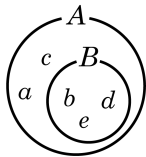
해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면

$A = \{\text{빨강}, \text{파랑}, \text{초록}\}$ 이다.

따라서 $\{\text{파랑}, \textcircled{\text{가}}\} \subset A$ 는 A 의 부분집합을 나타내므로 $\textcircled{\text{가}}$ 은 빨강 또는 초록이다.

20. 다음 벤 다이어그램에서 집합 A 의 부분집합 중 집합 B 의 원소를 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 A , B 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, e\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중 집합 B 의 원소를 반드시 포함하는 부분집합을 구하면 $\{b, d, e\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$ 이고 개수는 4개이다.

21. 두 집합

$A = \{x \mid x \text{는 'mathematics' 에 쓰인 자음}\}$,

$B = \{x \mid x \text{는 'science' 에 쓰인 자음}\}$

에 대하여 다음 보기의 알파벳 중 $A \cup B$ 의 원소가 아닌 것을 모두 골라라.

보기

$a, c, g, h, i, k, m, n, o, q, s, t$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : a

▷ 정답 : g

▷ 정답 : i

▷ 정답 : k

▷ 정답 : o

▷ 정답 : q

해설

$A = \{x \mid x \text{는 'mathematics' 에 쓰인 자음}\} = \{m, t, h, c, s\}$,

$B = \{x \mid x \text{는 'science' 에 쓰인 자음}\} = \{s, c, n\}$ 이다.

따라서 $A \cup B = \{m, t, h, c, s, n\}$

22. 어느 마을의 가구 수는 50 가구이다. A 신문을 보는 가구 수는 25가구, B 신문을 보지 않는 가구 수는 20가구, A 신문만 보는 가구 수는 18 가구일 때, B 신문만 보는 가구 수를 구하면?

① 20 가구

② 21 가구

③ 22 가구

④ 23 가구

⑤ 24 가구

해설

전체 마을 가구 수를 U , A 신문을 보는 가구 수를 A , B 신문을 보는 가구 수를 B 라 하자.

$n(U) = 50, n(A) = 25, n(B^c) = 20, n(A - B) = 18$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 50 - 20 = 30$ 이고

$n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 25 - 18 = 7$ 이다.

따라서 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 30 - 7 = 23$ 이다.

23. 명제 ' $2x^2 + ax - 9 \neq 0$ 이면 $x - 3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

①

-3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

대우인 ' $x - 3 = 0$ 이면 $2x^2 + ax - 9 = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$2 \cdot 3^2 + 3a - 9 = 0, 3a + 9 = 0$$

$$\therefore a = -3$$

24. $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \rightarrow \sim r$

② $\sim q \rightarrow \sim p$

③ $r \rightarrow \sim q$

④ $\sim p \rightarrow r$

⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \rightarrow \sim r$ (①) 이 참이고, 대우 $r \rightarrow \sim p$ (⑤) 도 참이다.

또, 각각의 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ (②), $\sim r \rightarrow \sim q$ (③) 가 모두 참이다.

25. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단, x, y 는 임의의 실수)

㉠ $p : x^2 \leq 0 \quad q : x = 0$

㉡ $p : x^2 + y^2 = 0 \quad q : xy = 0$

㉢ $p : a, b$ 는 유리수 $q : a + b, ab$ 는 유리수

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 필요충분조건이다. ($\because x$ 가 실수이다.)

㉡ $q \Rightarrow p$ (반례) : $x = 0, y = 1 \therefore$ 충분조건이다

㉢ $q \Rightarrow p$ (반례) : $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$

$\therefore$ 충분조건이다.

26. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.



답 :

조건



정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$

q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$

r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$

$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$

그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

27. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

해설

① 반례 : $a = -1, b = 1$

$$|-1| - |1| \geq |-1 - 1|$$

$$|-1| - |1| \geq |-2|$$

$$1 - 1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$$

② $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

③ $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

④ $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 1$$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0 \rightarrow (\bigcirc)$$

28. $a > 1$ 일 때, $a + \frac{4}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$a + \frac{4}{a-1} = a - 1 + \frac{4}{a-1} + 1$$

산술기하조건을 이용하면

$$a - 1 + \frac{4}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1) \times \frac{4}{a-1}} = 4$$

$\therefore$ 최솟값은 $4 + 1 = 5$

29. 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{10}$

④ $\sqrt{11}$

⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9)$$

$$(x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라고 하고
공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

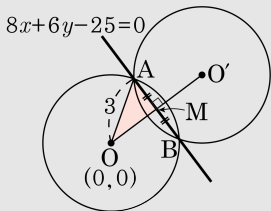
$$\overline{OO'} \text{ 은 } \overline{AB} \text{ 를 수직이등분하므로 } \overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



30. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$ 와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 5

④ 8

⑤ 10

해설

$$f(x : y) \rightarrow (x + 2, y + 1)$$

$$y = 2x + a \xrightarrow{f} (y - 1) = 2 \cdot (x - 2) + a$$

$$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$$

직선 $2x - y + (a - 3) = 0$ 과 $(0, 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}, |a - 3| = 5$$

$$a - 3 = \pm 5, a = 3 \pm 5$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

31. 점 $(-2, 1)$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, ab 의 값은?

① -8

② -6

③ -5

④ -3

⑤ -2

해설

두 점 $(-2, 1)$, (a, b) 를 이은 선분의
중점이 직선 $y = x - 1$ 위에 있으므로

$$\frac{1+b}{2} = \frac{-2+a}{2} - 1,$$

$$\therefore a - b = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 두 점 $(-2, 1)$, (a, b) 를 이은 직선의

기울기가 -1 이므로 $\frac{b-1}{a-(-2)} = -1$

$$\therefore a + b = -1 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -3$

$$\therefore ab = -6$$

32. 집합 $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$ 의 부분집합 중에서 4의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수가 64개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

4의 약수 : 1, 2, 4

집합 A 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이므로 원소 1, 2, 4를 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{n+1-3} = 64 = 2^6 \text{ 이다.}$$

$$n + 1 - 3 = 6 \quad \therefore n = 8$$

33. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) = \emptyset$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 와 같은 값을 모두 고르면? (정답 3개)

① $n((A \cup B) - n(A \cap B))$

② $n(\emptyset)$

③ $n(B) - n(A)$

④ $n(A)$

⑤ $n(B)$

해설

$(A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이므로 $A - B = \emptyset$, $B - A = \emptyset$ 이다.

따라서 $A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.

따라서 $n(A) - n(B) = 0$ 이고,

① $n((A \cup B) - n(A \cap B)) = 0$

② $n(\emptyset) = 0$

③ $n(B) - n(A) = 0$ 이다.

34. 전체 집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$ 일 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $A \cap B = \{7\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1, 3, 7, 11\}$

㉢ $A^c \cap B = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = \{5, 9, 15\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\},$$

$$A = \{1, 3, 7, 11\}, B = \{7, 13\}$$

$$\text{㉡ } A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 11\}$$

$$\text{㉢ } A^c \cap B = B - A = \{13\}$$

$$\text{㉣ } A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$$

$$\text{㉤ } A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 9, 15\}$$

35. 두 집합 $A = \{x | x \text{는 7미만의 자연수}\}$, $B = \{2, 3, 7, 8\}$ 에 대하여 $(B - A) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 64개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 3, 7, 8\}$$

$$(B - A) \cup X = X \text{이므로 } (B - A) \subset X,$$

$$(A \cup B) \cap X = X \text{이므로 } X \subset (A \cup B),$$

$$\{7, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

따라서, 집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 7, 8을 반드시 포함하는 집합이므로

$$2^{8-2} = 2^6 = 64(\text{개}) \text{이다.}$$