1. 중심이 $y = 2x$ 위에 있고, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$　② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$
③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$　④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$
⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

해설

중심이 $y = 2x$ 위에 있다고 했으므로
두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는
원의 중심은 $(a, 2a)$로 나타낼 수 있다.
$(a,\ 2a)$를 중심으로 하는 원을 식으로 표현하면
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$이다.
따라서 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$은
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$를 지나므로 대입했을 때 등식이 성립한다.
두 식을 연립하면, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식이
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$임을 알 수 있다.

2. 두 점 A(0, 0), B(6, 0)에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + y^2 = 4$
② $(x-4)^2 + y^2 = 8$
③ $(x-6)^2 + y^2 = 12$
④ $(x-8)^2 + y^2 = 16$
⑤ $(x-10)^2 + y^2 = 20$

해설

조건을 만족하는 점을 P$(x,\ y)$ 라고 하면

$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + y^2},\ \overline{BP} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}$

이때, $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 에서 $\overline{AP} = 2\overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$(x-8)^2 + y^2 = 16$

3. 두 원 $x^2+y^2=2$과 $(x-a)^2+(y-a)^2=2$이 만나지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는 $a<p$ 또는 $a>q$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

두 원 $x^2+y^2=2$, $(x-a)^2+(y-a)^2=2$는 만나지 않는다.
즉, 두 원이 서로 외부에 있거나 한 원이 다른 원의 내부에 있어야 하는데, 두 원의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{2}$이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있을 수는 없다. 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(a,\ a)$이므로 중심거리는
$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}|a|$
따라서 두 원이 서로 외부에 있으려면
$\sqrt{2}|a|>\sqrt{2}+\sqrt{2}$, $|a|>2$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

4. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 에 접할 때, a^2+b^2 의 최솟값을 구하면?

① 2　　② 4　　③ 8　　④ 12　　⑤ 16

해설

주어진 직선이 원에 접하므로 원의 중심과
직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같다.

$\therefore \dfrac{|-1|}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2}}=2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow a^2+b^2=\dfrac{1}{4}(ab)^2 \quad \cdots$ ㉠

산술기하 조건에 의해 $a^2+b^2 \geq 2ab$
즉, $a^2+b^2=2ab$ 일 때 최소이다.

㉠에 대입시키면, $2ab=\dfrac{1}{4}(ab)^2$

$\therefore\ ab=8$

$\therefore\ a^2+b^2$ 의 최솟값은 $2ab=16$

5. 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 과 직선 $3x+4y+a=0$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, a 의 값 중 정수들의 총합을 구하면?

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 원 중심에서 직선까지 거리가 반지름보다 작아야 한다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{|3\times 1+4\times(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<1$

$\Rightarrow \quad (a-1)^2-25<0$

$\Rightarrow \quad -4<a<6$

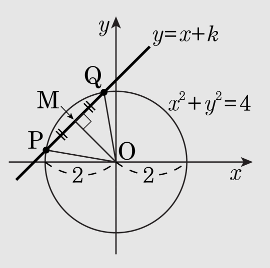
$\therefore$ 정수 $a=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

모두 합하면 9

6. 직선 $y = x + k$가 원 $x^2 + y^2 = 4$에 의하여 잘린 현 $\overline{PQ}$의 길이가 2일 때, k의 값은?

① $\pm\sqrt{5}$　② $\pm\sqrt{6}$　③ $\pm\sqrt{7}$
④ $\pm 2\sqrt{2}$　⑤ ± 3

해설



$\overline{PQ} = 2$이므로 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{PM} = 1$
원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP} = 2$
따라서 $\overline{OM} = \sqrt{OP^2 - PM^2}$
$= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$
이때 원과 직선 $x - y + k = 0$
사이의 거리는 $\overline{OM}$의 길이와 같으므로
$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{3},\ |k| = \sqrt{6}, k = \pm\sqrt{6}$

7. 직선 $3x-4y-12=0$ 에 수직이고 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}$
② $y=-2x-\frac{4}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{5}x-1$
③ $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$
④ $y=-\frac{6}{5}x-\frac{2}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{7}x-\frac{9}{2}$
⑤ $y=-4x-3$ 또는 $y=-9x-6$

해설

$3x-4y-12=0$ 에서

$y=\frac{3}{4}x-3 \cdots\cdots ㉠$

이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로

기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+b \cdots\cdots ㉡$

로 놓을 수 있다.

㉡에서 $4x+3y-3b=0$ 이고,

원의 중심 $(-3,2)$ 에서 이 직선까지의 거리가

반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-12+6-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, |3b+6|=5, 3b+6=\pm5$

$3b=-1$ 또는 $3b=-11$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y+12=0$ 이므로

㉡을 이 식에 대입하여 정리하면

$25x^2+6(17-4b)x+9\left(b^2-4b+12\right)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=\left\{3(17-4b)\right\}^2-25\cdot 9\left(b^2-4b+12\right)=0$

$D=0$ 에서 $9b^2+36b+11=0,$

$(3b+1)(3b+11)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$ 이것을 ㉡ 에 대입하면

구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

8. 점 A(0, a)에서 원 $x^2 + (y-3)^2 = 8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y = mx + a$로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서 접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$(a-3)^2 = 8(m^2 + 1)$

$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

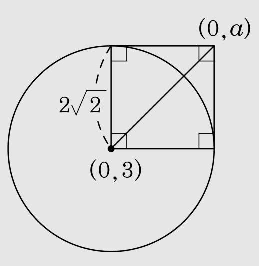
$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$

$a^2 - 6a - 7 = 0$, $(a-7)(a+1) = 0$

$\therefore\ a = 7\ (\because a > 0)$

해설

원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는 반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a-3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$



$a - 3 = \pm 4$

$\therefore\ a = 7$ 또는 $a = -1$

그런데 $a > 0$ 에서 $a = 7$

9. 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위의 점 P에서 직선 $3x-4y-24=0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

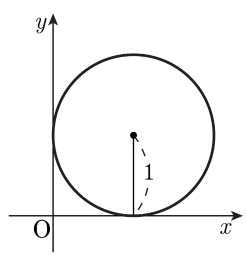
해설

$x^2+y^2-8y-9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$ 이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x-4y-24=0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{40}{5}=8$$

따라서 구하는 최소 거리는
$d-$ (원의 반지름의 길이)$=8-5=3$

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1} = k$라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은
k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$를 지난다.
이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

11. 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+b)$ 에 의하여 점$(3,\ 5)$가 점$(8,\ 20)$으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

점$(3,\ 5)$가 점$(8,\ 20)$으로 이동하려면 x축 방향으로 $+5$, y축 방향으로 $+15$만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a=5,\ b=15$

12. 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ 를 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
$(x-2)^2+(y-3)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 :$(2,3)$
$(x+1)^2+(y-5)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 :$(-1,5)$
점 $(-1,\ 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+3)+3(y-2)+2=0$
$\therefore\ x+3y-1=0\ \cdots$ ㉠
㉠ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
$a=3$, $b=-1$ $\therefore a+b=2$

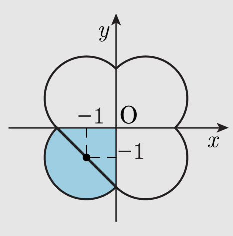
13. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi+2$　　② $2\pi+4$　　③ $2\pi+8$

④ $4\pi+8$　　⑤ $8\pi+8$

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$

따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로

$4(\pi+2)=4\pi+8$

14. 점 $(-1,\ 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(-1,\ 2) \xrightarrow{\text{원점대칭}} (1,\ -2) \xrightarrow{x\text{축으로 }a\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2) \xrightarrow{y\text{축으로 }b\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2+b)$

$\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2+b,\ 1+a) = (3,\ 2)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 5$

15. 원 $x^2+y^2=4$ 를 점 $(0,1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $f(x,y)=0$ 일 때, $f(x-a,\ y-b)=0$ 은 x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 된다. 이 때, $a+b$ 의 값을 모두 구하면?

① 0, 2, 4 ② 1, 4, 5 ③ −2, 2, −6
④ 4, 5, 6 ⑤ −1, 3, 4

해설

원 $x^2+y^2=4$ 를 점 $(0,1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $x^2+(y-2)^2=4$ 이다.
이 원을 x 축으로 a 만큼, y 축으로 b 만큼 이동시킨 도형이 x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 되므로,

$\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-2 \\ b=0 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-2 \\ b=-4 \end{cases}$

따라서 $a+b=2$ 또는 -2 또는 -6

16. 다음 중 원 $x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$
② $x^2+y^2=1$
③ $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$
④ $(x+1)^2+y^2=3$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=16$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 에서 $(x+3)^2+(y-3)^2=16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4 인 ⑤이다.

17. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $A = \{\varnothing\}$ 일 때, $n(A) = 1$

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 0$

③ $C = \{x \mid x$는 15의 약수$\}$ 일 때, $n(C) = 4$

④ $n(\{a,\ b,\ c\}) - n(\{a,\ b\}) = c$

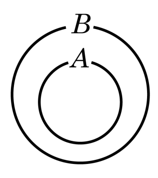
⑤ $n(\{0,\ 1,\ 2\}) = 3$

해설

② 집합 $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 1$

④ $n(\{a,\ b,\ c\}) - n(\{a,\ b\}) = 3 - 2 = 1$

18. 다음 중 두 집합 A, B 사이의 포함 관계가 아래 그림의 벤 다이어그램과 같이 나타나는 것을 모두 고르면?



① $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$, $B = \{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$

② $A = \{x \mid x$는 짝수$\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

③ $A = \{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\}$, $B = \{x \mid$ x는 5 이하의 자연수$\}$

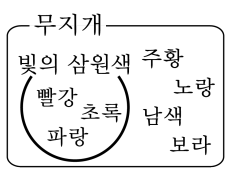
④ $A = \{x \mid x = 3 \times n,\ n = 1,\ 2,\ 9\}$, $B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$

⑤ $A = \varnothing$, $B = \{\varnothing\}$

해설

① 포함 관계 없음
② $B \subset A$
③ $A \subset B$
④ 포함 관계 없음
⑤ $A \subset B$

19. 다음은 무지개 색상과 빛의 삼원색을 나타낸 것이다. 빛의 삼원색을 집합 A 라고 하자. $\{$파랑, ㉠$\} \subset A$ 일 때, ㉠이 될 수 있는 색을 모두 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

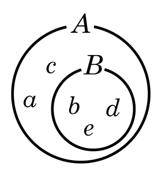
▷ 정답 : 빨강

▷ 정답 : 초록

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면
$A = \{$빨강, 파랑, 초록$\}$ 이다.
따라서 $\{$파랑, ㉠$\} \subset A$ 는 A 의 부분집합을 나타내므로 ㉠은 빨강 또는 초록이다.

20. 다음 벤 다이어그램에서 집합 A 의 부분집합 중 집합 B 의 원소를 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 A, B를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, e\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중 집합 B 의 원소를 반드시 포함하는 부분집합을 구하면 $\{b, d, e\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$ 이고 개수는 4 개이다.

21. 두 집합
$A = \{x \mid x$는 '*mathematics*' 에 쓰인 자음$\}$,
$B = \{x \mid x$는 ' science ' 에 쓰인 자음$\}$
에 대하여 다음 보기의 알파벳 중 $A \cup B$ 의 원소가 아닌 것을 모두 골라라.

보기

$a, c, g, h, i, k, m, n, o, q, s, t$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : a

▷ 정답 : g

▷ 정답 : i

▷ 정답 : k

▷ 정답 : o

▷ 정답 : q

해설

$A = \{x \mid x$는 '*mathematics*' 에 쓰인 자음$\} = \{m, t, h, c, s\}$,
$B = \{x \mid x$는 ' science ' 에 쓰인 자음$\} = \{s, c, n\}$ 이다.
따라서 $A \cup B = \{m, t, h, c, s, n\}$

22. 어느 마을의 가구 수는 50 가구이다. A 신문을 보는 가구 수는 25가구, B 신문을 보지 않는 가구 수는 20가구, A 신문만 보는 가구 수는 18 가구일 때, B 신문만 보는 가구 수를 구하면?

① 20 가구　② 21 가구　③ 22 가구
④ 23 가구　⑤ 24 가구

해설

전체 마을 가구 수를 U, A 신문을 보는 가구 수를 A, B 신문을 보는 가구 수를 B 라 하자.
$n(U) = 50, n(A) = 25, n(B^c) = 20, n(A - B) = 18$ 이므로
$n(B) = n(U) - n(B^c) = 50 - 20 = 30$ 이고
$n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 25 - 18 = 7$ 이다.
따라서 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 30 - 7 = 23$ 이다.

23. 명제 '$2x^2+ax-9 \neq 0$ 이면 $x-3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

대우인 '$x-3=0$이면 $2x^2+ax-9=0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$2\cdot 3^2+3a-9=0,\ 3a+9=0$

$\therefore\ a=-3$

24. $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \rightarrow \sim r$　　② $\sim q \rightarrow \sim p$　　③ $r \rightarrow \sim q$
④ $\sim p \rightarrow r$　　⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설
$p \rightarrow q$ 가 참이고 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \rightarrow \sim r$ (①) 이 참이고, 대우 $r \rightarrow \sim p$ (⑤) 도 참이다.
또, 각각의 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ (②), $\sim r \rightarrow \sim q$ (③) 가 모두 참이다.

25. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단, x, y는 임의의 실수)

㉠ $p : x^2 \le 0$ $q : x = 0$

㉡ $p : x^2 + y^2 = 0$ $q : xy = 0$

㉢ $p : a, b$는 유리수 $q : a + b, ab$는유리수

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 필요충분조건이다. ($\because$ x 가 실수이다.)
㉡ $q \Rightarrow p$ (반례) : $x = 0, y = 1$ $\therefore$ 충분조건이다
㉢ $q \Rightarrow p$ (반례) : $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$
$\therefore$ 충분조건이다.

26. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : ________ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 s이기 위한 필요조건이다.

27. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a|-|b| \ge |a-b|$

② $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$

④ $a^2+ab+b^2 \ge 0$

⑤ $a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$

해설

① 반례 : $a=-1$, $b=1$

$|-1|-|1| \ge |-1-1|$

$|-1|-|1| \ge |-2|$

$1-1 \ge 2 \to 0 \ge 2 \to (\times)$

② $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0 \to (\bigcirc)$

③ $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 \ge a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

$a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \ge 0 \to (\bigcirc)$

④ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3b^2}{4} \ge 0 \to (\bigcirc)$

⑤ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+1+b^2-2b+1+1$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0 \to (\bigcirc)$

28. $a > 1$일 때, $a + \dfrac{4}{a-1}$의 최솟값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$a + \dfrac{4}{a-1} = a - 1 + \dfrac{4}{a-1} + 1$

산술기하조건을 이용하면

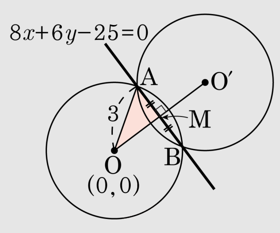
$a - 1 + \dfrac{4}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1) \times \dfrac{4}{a-1}} = 4$

$\therefore$ 최솟값은 $4 + 1 = 5$

29. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설



두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9) - (x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}$ ⋯⋯ ㉠

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$ 까지의 거리이므로

$\overline{OM} = \dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \dfrac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$

30. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$ 와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x : y) \quad \rightarrow \quad (x+2,\ y+1)$

$y = 2x + a \xrightarrow{f} (y-1) = 2 \cdot (x-2) + a$

$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$

직선 $2x - y + (a-3) = 0$ 과 $(0,\ 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$\dfrac{|a-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5},\ |a-3| = 5$

$a - 3 = \pm 5,\ a = 3 \pm 5$

$\therefore\ a = 8\ \ (\because\ a > 0)$

31. 점 $(-2,\ 1)$ 을 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -8　② -6　③ -5　④ -3　⑤ -2

해설

두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의 중점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$\dfrac{1+b}{2}=\dfrac{-2+a}{2}-1$,

$\therefore\ a-b=5\ \cdots$ ㉠

또, 두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 직선의 기울기가 -1 이므로 $\dfrac{b-1}{a-(-2)}=-1$

$\therefore\ a+b=-1\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore\ ab=-6$

32. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \cdots,\ 2^n\}$ 의 부분집합 중에서 4 의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

4 의 약수 : 1, 2, 4

집합 A 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이므로 원소 1, 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{n+1-3} = 64 = 2^6$ 이다.

$n+1-3 = 6 \qquad \therefore\ n = 8$

33. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\left(A \cap B^C\right) \cup \left(B \cap A^C\right) = \varnothing$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 와 같은 값을 모두 고르면? (정답 3 개)

① $n((A \cup B) - n(A \cap B))$ ② $n(\varnothing)$

③ $n(B) - n(A)$ ④ $n(A)$

⑤ $n(B)$

해설

$\left(A \cap B^C\right) \cup \left(B \cap A^C\right) = (A - B) \cup (B - A) = \varnothing$ 이므로 $A - B = \varnothing$, $B - A = \varnothing$ 이다.
따라서 $A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.
따라서 $n(A) - n(B) = 0$ 이고,
① $n((A \cup B) - n(A \cap B)) = 0$
② $n(\varnothing) = 0$
③ $n(B) - n(A) = 0$ 이다.

34. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 15 이하의 홀수$\}$에 대하여 $A = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$, $B = \{7,\ 13\}$일 때, 다음 보기에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

보기

㉠ $A \cap B = \{7\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$

㉢ $A^c \cap B = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = \{5,\ 9,\ 15\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$U = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$,
$A = \{1,\ 3,\ 7,\ 11\}$, $B = \{7,\ 13\}$
㉡ $A \cap B^c = A - B = \{1,\ 3,\ 11\}$
㉢ $A^c \cap B = B - A = \{13\}$
㉣ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$
㉤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5,\ 9,\ 15\}$

35. 두 집합 $A = \{x | x$는 7미만의 자연수$\}$, $B = \{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$에 대하여 $(B - A) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 64 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B = \{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$
$(B - A) \cup X = X$이므로 $(B - A) \subset X$,
$(A \cup B) \cap X = X$이므로 $X \subset (A \cup B)$,
$\{7,\ 8\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$,
따라서, 집합 X는 $A \cup B$의 부분집합 중 원소 7, 8을 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{8-2} = 2^6 = 64$(개)이다.