

1. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.

③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.

⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

2. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.

② 어떤 명제가 참이면 그 명제의 대우도 참이다.

③ 어떤 명제의 역, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.

④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.

⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설

명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이고, 명제가 거짓이면 그 명제의 대우도 항상 거짓이다.

3. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 원소 x, y 에 대하여 다음 명제 중 거짓인 것은?

① 어떤 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

② 어떤 x, y 에 대하여 $x + y \leq 5$ 이다.

③ 모든 x 에 대하여 $x - 1 < 5$ 이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 - 1 \leq 0$ 이다.

⑤ 모든 x 에 대하여 $|x - x^2| \geq 5$ 이다.

해설

⑤ (반례) $x = 1$ 인 경우 $|1 - 1| = 0$ 이므로 거짓이다.

4. 두 실수 x, y 에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

$$x + y < 8 \text{이면 } x < -2 \text{ 또는 } y < k$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

따라서 $x \geq -2$ 이고 $y \geq k$ 이면 $x + y \geq 8$

$x \geq -2, y \geq k$ 에서 $x + y \geq k - 2$ 이므로

$$k - 2 \geq 8, \therefore k \geq 10$$

따라서 k 의 최솟값은 10이다.

5. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.



답 :

조건



정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$

q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$

r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$

$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$

그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

6. 네 개의 조건 p, q, r, s 에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$ 라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$

② $p \Rightarrow \sim r$

③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$

⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$$

$$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$$

$$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$$

7. 다음 중 틀린 것은?

- ① $a^2 + b^2 = 0$ 은 $a = b = 0$ 이기 위한 필요조건이다.
- ② $xy \leq 1$ 또는 $x + y \leq 2$ 는 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이기 위한 필요충분조건이다.
- ③ $x = 3$ 은 $x^2 - x - 6 = 0$ 이기 위한 충분조건이다.
- ④ a, b, c 가 실수일 때, $ac = bc$ 는 $a = b$ 이기 위한 필요조건이다.
- ⑤ $x + y$ 가 유리수인 것은 x, y 모두가 유리수이기 위한 필요조건이다.

해설

① $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (필요충분조건)

※ 이 경우 필요충분조건이 된다는 것은 서로가 서로에게 충분조건도 되고 필요조건도 되는 것이므로 틀린 것이 아니다.

② 대우: $x > 1, y > 1 \Rightarrow xy > 1, x + y > 2$ (참)

이: $xy > 1, x + y > 2 \nRightarrow x > 1, y > 1$ (거짓) (반례: $x = 10, y = 0.5$)

대우가 참, 이가 거짓이므로 주어진 명제는 참이고 그 역은 거짓이다.

$\therefore$ 충분조건

8. 두 조건 $p : x \leq 3 - a$ 또는 $x \geq a$, $q : |x| \leq 7$ 에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \geq 3$)

① $a > 10$

② $a > 7$

③ $a > 3$

④ $a > -1$

⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.
 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $Q \subset P^c$ 이므로
 $P^c = \{x \mid 3 - a < x < a\}$,
 $Q = \{x \mid -7 \leq x \leq 7\}$ 이므로
 $3 - a < -7, a > 7$
따라서 $a > 10, a > 7$ 이므로 $a > 10$

9. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E 의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

- (i) A 형인 사람은 B 형이 아니다.
(ii) C 형이 아닌 사람은 B 형이 아니다.
(iii) C 형인 사람은 D 형이 아니다.
(iv) E 형인 사람은 B 형이다.

이

가설에 의하여 성립하지 않는 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

- ㉠ A 형인 사람은 E 형이 아니다.
㉡ E 형인 사람은 C 형이 아니다.
㉢ E 형이면서도 D 형인 사람이 있다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E 인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv)를 명제로 표현하면

$A \Rightarrow \sim B, \sim C \Rightarrow \sim B, C \Rightarrow \sim D, E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면

(i)의 대우: B 형이면 A 형이 아니다.

즉, $B \Rightarrow \sim A$

(ii)의 대우: B 형이면 C 형이다.

즉, $B \Rightarrow C$

(iii)의 대우: D 형이면 C 형이 아니다.

즉, $D \Rightarrow \sim C$

(iv)의 대우: B 형이 아니면 E 형이 아니다.

즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$

$E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,

즉, $A \Rightarrow \sim E$

$\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \Rightarrow \sim E$,

즉, $E \Rightarrow C$

$D \Rightarrow \sim C, \sim C \Rightarrow \sim B, \sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $D \Rightarrow \sim E$

따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢이다.

10. 다음 보기는 p 가 q 이기 위한 어떤 조건인가를 말하고 있다. 올바른 것의 개수는 몇 개인가?(단, a, b, x, y 는 실수)

보기

- ㉠ $p: a + b > 2, q: a > 1, b > 1$ (충분조건)
- ㉡ $p: a$ 는 4 의 배수, $q: a$ 는 짝수 (충분조건)
- ㉢ $p: (A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset, q: A = B$ (필요충분조건)
- ㉣ $p: a < b, q: |a| < |b|$ (필요충분조건)
- ㉤ $p: |x - 1| = 2, q: x^2 - 2x + 3 = 0$ (필요조건)
- ㉥ $p: x = 1$ 이고 $y = 1, q: x + y = 2$ 이고 $xy = 1$ (필요조건)

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

각 조건에 대한 대우가 참인지 확인하고 반례를 찾는다.

- ㉠ 반례: $a = 0, b = 3 \therefore$ 필요조건 (거짓)
 - ㉡ 대우: a 가 홀수이면 4의 배수가 아니다. (참)
 - ㉢ $(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow (A \cup B) \subset (A \cap B)$
 $\therefore A = B$ (참)
 - ㉣ 반례: $a = -3, b = 1$ (거짓)
 - ㉤ $|x - 1| = 2$ 의 해집합 $P = \{-1, 3\}$
 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 해집합 $Q = \emptyset$
 - ㉥ $x + y = 2$ 이고 $xy = 1$ 을 연립하면
 $y = 2 - x, x(2 - x) = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\therefore x = 1, y = 1$ 이므로 필요충분조건 (거짓)
- 따라서 옳은 것은 3개