

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고 원점을 지나는 원의 방정식을 구하면?

㉠ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ ㉡ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 7$

㉢ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 8$ ㉣ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

㉤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$

해설

구하는 원의 방정식을

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2 \quad \dots \text{㉠으로 놓으면}$$

이 원이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$(0-2)^2 + (0+1)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 5$$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

2. 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 3$

② $x^2 + y^2 = 1$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$

④ $x^2 + y^2 = 3^2$

⑤ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$

해설

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow \therefore x^2 + y^2 = 9$$

3. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ② $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}$

③ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ ④ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

4. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 의 중심이 (a, b) , 반지름의 길이가 r 일 때, $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 을 표준형으로 나타내면
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$
따라서, 중심은 $(2, 3)$
반지름의 길이가 4 이므로
 $a = 2, b = 3, r = 4$
 $\therefore a + b + r = 9$

5. 다음 방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ 이 나타내는 원의 중심의 좌표를 (a, b) , 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a + b + r$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ 을 정리하면
 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이다.
따라서 방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ 이 나타내는 원의 중심의 좌표는 $(-1, 4)$ 이고, 반지름의 길이는 5 이다.
 $\therefore a + b + r = 8$

6. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$ 의 중심의 좌표를 (a, b) 반지름의 길이를 r 라 할 때, $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면

$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 25$$

$$\therefore (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

따라서 중심의 좌표는 $(a, b) = (5, 1)$

반지름의 길이는 $r = 5$ 이므로

$$a + b + r = 5 + 1 + 5 = 11$$

7. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$ 과 중심이 같고, 원점을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x+4)^2 + (y-3)^2 &= 26 \\ \text{중심 : } (-4, 3) \\ \therefore (x+4)^2 + (y-3)^2 &= r^2, \\ (0, 0) \text{ 을 지나므로} \\ r &= 5 (\because r > 0)\end{aligned}$$

8. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

- ① 중심이 (2, 1) 이고 반지름의 길이가 1 인 원
- ② 중심이 (2, -1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
- ③ 중심이 (-2, 1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
- ④ 중심이 (2, -1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원
- ⑤ 중심이 (-2, 1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 16 \\ \therefore \text{중심은 } (2, -1) \text{ 이고,} \\ \text{반지름은 } 4 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

9. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표는?

① (2, -4)

② (2, 4)

③ (-2, -3)

④ (-2, 3)

⑤ (4, -4)

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 25 \\ \Rightarrow \text{중심은 } (-2, 3)\end{aligned}$$

10. 좌표평면에서 $(-5, 0)$ 과 $(25, 0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이 있다. $(x, 15)$ 가 원 위의 점일 때, x 는?

① 10 ② 12.5 ③ 15 ④ 17.5 ⑤ 20

해설

두 점 $(-5, 0)$ 과 $(25, 0)$ 의 중점 $(10, 0)$ 이 중심이고
반지름은 15인 원이므로
 $(x - 10)^2 + y^2 = 225$
 $(x, 15)$ 가 이 방정식을 만족시키므로 대입하면,
 $(x - 10)^2 + 15^2 = 225 \quad \therefore x = 10$

11. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인
원의 방정식은 $\therefore (x-a)^2 + (y-1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0-a)^2 + (-3-1)^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

12. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

- ① $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ ② $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$
③ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ ④ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$
⑤ $x^2 + y^2 + x - y = 2$

해설

$$\begin{aligned}(\overline{PA})^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\(\overline{PB})^2 &= x^2 + (y-2)^2 \\ \therefore (x-2)^2 + y^2 + x^2 + (y-2)^2 &= 12 \\ \therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y &= 2\end{aligned}$$

13. 원 $x^2 + y^2 - 2kx + ky + 3k = 0$ 의 중심이 $(4, -2)$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

- ① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 $(4, -2)$ 이므로
 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = r^2$
 $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - r^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
이때, 원 $\textcircled{1}$ 과 원 $x^2 + y^2 - 2kx + ky + 3k = 0$ 이 같으므로
 $-2k = -8, \quad k = 4$
 $3k = 20 - r^2$
 $\therefore k = 4, \quad r = 2\sqrt{2} (\because r > 0)$
따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

14. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

15. 원 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같고, 점 $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - 2y = 0$

② $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같은 원의 방정식은

$x^2 + y^2 - 2y + k = 0$ 의 꼴이다.

또, 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 + 1 - 2 + k = 0 \quad \therefore k = 0$$

따라서, 구하는 방정식은 $x^2 + y^2 - 2y = 0$

16. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - c = 0$ 이 y 축과 만나고 x 축과는 만나지 않을 때, 정수 c 의 개수는?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

원의 방정식

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - c = 0$$

을 표준형으로 바꾸면

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = c+13 \text{ 이므로}$$

중심이 $(2, 3)$ 반지름의 길이가 $\sqrt{c+13}$

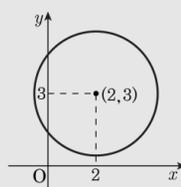
인 원이 된다.

다음 그림과 같이 y 축과는 만나고,

x 축과는 만나지 않으므로

$$2 \leq \sqrt{c+13} < 3 \text{ 에서 } -9 \leq c < -4$$

\therefore 정수 c 의 개수는 $-9, -8, -7, -6, -5$ 의 5개



17. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로
중심은 $(2, -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로
 $(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$
 $\therefore r^2 = 26$

18. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ ④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로

\overline{AB} 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1) 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\begin{aligned} \text{반지름 } r = \overline{OA} &= \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

∴ 원의 방정식은 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$

19. 두 점 A(1, 2), B(-1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$ ② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ④ $x^2 + (y-3)^2 = 2$

⑤ $x^2 + y^2 = 2$

해설

$$\text{원의 중심} : \left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (0, 3)$$

$$\text{반지름} : \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2}$$

$$\therefore \text{원의 방정식} : x^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2$$

20. 두 점 $(2, 1)$, $(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 29$ ② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4}$

③ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 29$ ④ $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$

⑤ $x^2 + y^2 = 4$

해설

원의 중심은 $\left(\frac{2-3}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 이고,

반지름은 $\frac{\sqrt{(2+3)^2 + (1+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$ 이다.

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4}$$

21. 두 점 $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 52$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$

⑤ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 52$

해설

원의 중심은 두 점 A , B 의 중점이므로,

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2) \text{ 이다.}$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

22. 두 점 A(-5, 1), B(3, 7) 을 지름의 양끝으로 하는 원의 중심을 (a, b), 반지름의 길이를 r 이라 할 때, a + b + r 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

A(-5, 1) B(3, 7) 이 지름의 양끝이므로

\overline{AB} 의 중점은 중심의 좌표와 같다.

중점

$$M = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{1+7}{2} \right) = (-1, 4) = (a, b)$$

반지름

$$r = \sqrt{(-5+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore a + b + r = -1 + 4 + 5 = 8$$

23. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ 의 중심과 점 $(4, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a+b+r^2$ 의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$
 $\Rightarrow (x+2)^2 + (y-5)^2 = 1$
 \therefore 구하는 원은 $(-2, 5)$ 와 $(4, -1)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.
이 원은 중심이 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (1, 2)$
반지름이 $\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + (-1-5)^2} = 3\sqrt{2}$
이므로 원의 방정식은
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$
 $\therefore a=1, b=2, r^2=18$
 $\therefore a+b+r^2=21$

24. 두 점 A(-3, 8), B(7, -4) 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ ② $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 32$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 7$ ④ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 22$

⑤ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면

C 는 \overline{AB} 의 중점이므로

$$C\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{8-4}{2}\right)$$

$\therefore C(2, 2)$

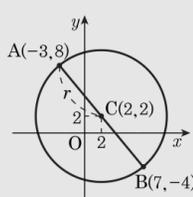
반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 \overline{AB} 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{(2+3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{61}$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$$



25. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 0) 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

- ① $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ② $x^2 + y^2 = 4$
③ $(x-1)^2 + y^2 = 2$ ④ $x^2 + (y-4)^2 = 16$
⑤ $x^2 + (y-1)^2 = 2$

해설

선분 AB 의 중점은 (3, 0)이고,
선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점은 (-1, 0) ,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 M(1, 0), 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x-1)^2 + y^2 = 4$

26. 두 점 $(-2, 1)$, $(6, 5)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$

② $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 15 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

해설

i) 원의 중심은 두 점의 중점과 같다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (2, 3)$$

ii) 반지름 길이는 중심과 한 점 사이의 거리와 같다.

$$\Rightarrow \sqrt{(2-6)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \text{원의 방정식은 } (x-2)^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$$