

1. 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-5, 0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x = -1$

② $x = -2$

③ $x = -3$

④ $x = -4$

⑤ $x = -5$

해설

구하는 접선의 방정식은 $-5 \cdot x + 0 \cdot y = 25$

$$-5x = 25$$

$$\therefore x = -5$$

2. x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(-2, 4)$ 가 점 $(6, -2)$ 로 옮겨진다. 이때, 상수 m, n 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점 $(-2, 4)$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼,

y 축의 방향으로 n 만큼 옮기면

$(-2 + m, 4 + n)$ 이고

이 점이 $(6, -2)$ 와 일치하므로

$$-2 + m = 6 \quad \therefore m = 8$$

$$4 + n = -2 \quad \therefore n = -6$$

따라서, 구하는 m, n 의 값의 합은 $8 + (-6) = 2$

3. 평행이동 $T : (x, y) \rightarrow (x + 3, y + 2)$ 에 의하여 직선 $y = 5x$ 가 옮겨지는 도형의 방정식을 구하면?

① $y = x - 5$

② $y = 2x - 3$

③ $y = 3x - 9$

④ $y = 4x - 7$

⑤ $y = 5x - 13$

해설

x 대신 $x - 3$, y 대신 $y - 2$ 를 대입하면 되므로
구하는 도형의 방정식은 $y - 2 = 5(x - 3)$

$\therefore y = 5x - 13$

4. 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$

③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$

⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은

$y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의
중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{30}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = 2x \pm \sqrt{30}$$

5. 점 $A(0, a)$ 에서 원 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1

② $-\sqrt{2}$

③ 2

④ $3\sqrt{2}$

⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$y = mx + a$ 이다. 원의 중심 $(0, 2)$ 에서 직선 $mx - y + a = 0$ 에

이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\frac{|m \times 0 - 2 + a|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 3$

$\therefore |a - 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2 - (a^2 - 4a - 5) = 0$ 이 방정식의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$$m_1 m_2 = -\frac{1}{9}(a^2 - 4a - 5) = -1, a^2 - 4a - 14 = 0$$

$$\therefore a = 2 \pm 3\sqrt{2}$$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

$$(2 + 3\sqrt{2}) + (2 - 3\sqrt{2}) = 4$$

6. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

7. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

① 6 cm, 8 cm

② 6 cm, 10 cm

③ 6 cm, 12 cm

④ 9 cm, 10 cm

⑤ 9 cm, 12 cm

해설

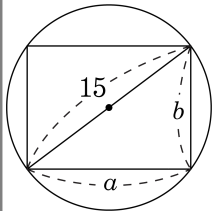
$$\text{i) } a + b = \frac{42}{2} = 21$$

$$\text{ii) } a^2 + b^2 = 15^2$$

$$\text{i), ii) 를 연립하면, } a^2 + (21-a)^2 - 225 = 0$$

$$\Rightarrow a = 12, 9$$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



8. 좌표평면 위의 두 점 $(2, 2)$, $(9, 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$

② 5

③ $\frac{11}{2}$

④ 6

⑤ $\frac{13}{2}$

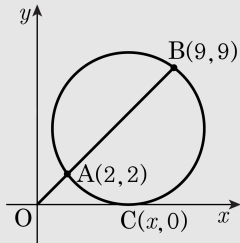
해설

다음 그림에서

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\therefore x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$$

$$\therefore x = 6$$



9. 직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행 이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하므로 $3(x - 2) + 4(y + 3) - 5 = 0$ 으로 이동한다.

이 직선의 y 절편은 $x = 0$ 을 대입하면 $y = -\frac{1}{4}$

10. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33

② 35

③ 45

④ 49

⑤ 55

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서

원에 그은 접선의 방정식을 $y + 1 = m(x - 3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y + 1 = m(x - 3)$,

즉 $mx - y - 3m - 1 = 0$ 에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m+1| = \sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2 + 3m - 2 = 0$, $(2m-1)(m+2) = 0$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

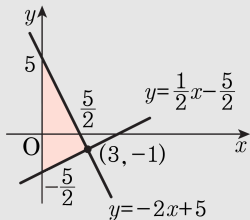
즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4}$$

$$\therefore 4S = 45$$



11. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 4, (x-5)^2 + y^2 = 25$$

① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)

③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)

④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)

⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$$x^2 + y^2 = 4 \dots\dots \textcircled{A}$$

$$(x-5)^2 + y^2 = 25 \dots\dots \textcircled{B}$$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$
 $\dots\dots \textcircled{C}$ 로 놓으면

원 $\textcircled{A}$ 과 직선 $\textcircled{C}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 이
 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{D}$$

또, 원 $\textcircled{B}$ 도 직선 $\textcircled{C}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{E}$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{D} \div \textcircled{E}$ 을 하면

$$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$$

$$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$$

$$\therefore b = -\frac{10}{7}a \text{ 또는 } b = \frac{10}{3}a$$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, $\textcircled{D}$ 에서

$$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$24a^2 + 49 = 0$$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, $\textcircled{D}$ 에서

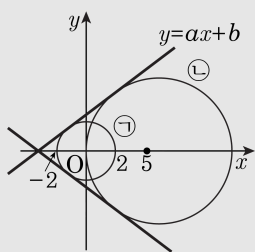
$$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

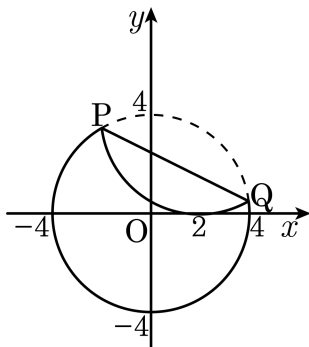
$$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2} \text{ (복부호 동순)}$$



12. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 점 $(2, 0)$ 에서 x 축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편을 구하여라.

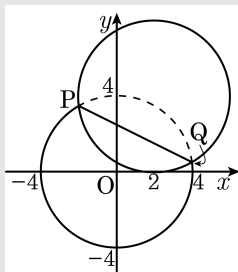


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 에서 x 과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16 //$



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편은 5이다.

13. 직선 $y = 3x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동 한 직선이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접할 때, a^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시킨 직선

$$: y = 3(x - a) \Rightarrow 3x - y - 3a = 0$$

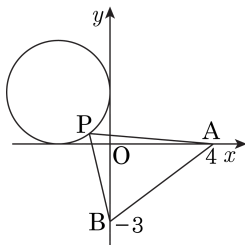
원에 접하므로 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 3$$

$$a = \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore a^2 = 10$$

14. 다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 위를 움직이는 점 P 와 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, -3)$ 으로 이루어지는 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최솟값과 최댓값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원 위의 한 점 P' 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선 직선 l 에 이르는 거리가 최대일 때 $\triangle ABP'$ 의 높이는 최대가 되고 넓이도 최대이다. 마찬가지로 원 위의 한 점 P 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선

직선 l 에 이르는 거리가 최소일 때 $\triangle ABP$ 의

높이는 최소가 되고 넓이도 최소이다.

원의 중심 $(-2, 2)$ 에서 A, B 를 지나는 직선

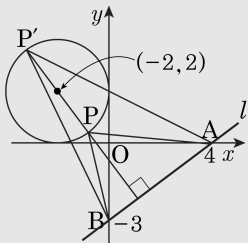
$l : 3x - 4y - 12 = 0$ 에 이르는 거리는

$$d = \frac{|-6 - 8 - 12|}{5} = \frac{26}{5}$$

$d + r$ 일 때 최대거리, $d - r$ 일 때 최소거리

$$\begin{cases} M = \left(\frac{26}{5} + 2\right) \times \overline{AB} \times \frac{1}{2} = 18 \quad (\because \overline{AB} = 5) \\ m = \left(\frac{26}{5} - 2\right) \times \overline{AB} \times \frac{1}{2} = 8 \end{cases}$$

$$\therefore M + m = 26$$



15. 두 점 $A(2, 6)$, $B(5, 2)$ 가 있다. 점 $P(x, y)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위를 움직일 때, $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 한다. $M + m$ 의 값은?

① 24

② 26

③ 28

④ 30

⑤ 32

해설

$\triangle ABP$ 의 넓이는 다음 그림과 같이 P 가 I 일 때 최댓값, II 일 때 최솟값을 가진다.

$$\overline{AB} \text{ 의 방정식이 } y = \frac{2-6}{5-2}(x-2) + 6$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 26 = 0$$

$$\therefore \triangle ABP_2 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \left(\frac{|-26|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \left(\frac{26}{5} - 2 \right)$$

$$\triangle ABP_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \left(\frac{|-26|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \left(\frac{26}{5} + 2 \right)$$

$$\Rightarrow M + m = 26$$

