

1. $z = \frac{1+3i}{1-i}$ 일 때, 다음 중 z 의 켤레복소수 $\bar{z}$ 와 같은 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{1+3i}{1+i}$

② $\frac{1-3i}{1+i}$

③ $\frac{1-3i}{1-i}$

④ $\frac{1-i}{1+3i}$

⑤ $\frac{1+i}{1-3i}$

해설

$$\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \text{ 이므로}$$

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{1+3i}{1-i}\right)} = \frac{\overline{1+3i}}{\overline{1-i}} = \frac{1-3i}{1+i}$$

2. 원점 O에서 직선 L : $ax - y + 1 = 0$ 에 내린 수선의 길이가 $\frac{1}{2}$ 일 때 양수 a 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ $\sqrt{5}$

⑤ 3

해설

수선의 길이는 원점과 직선 L 사이의 거리이므로

$$\frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = 2$$

$$a^2 = 3$$

$$\therefore a = \sqrt{3} (\because a > 0)$$

3. 방정식 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, a, b, c 는 모두 0 이 아니다.)

① $b^2 - 4c = 0$

② $b^2 + 4c = 0$

③ $a^2 - 4c = 0$

④ $a^2 + b^2 - 4c = 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 4c = 0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x = 0$ 을 대입하면 되므로

$$y^2 + by + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

원이 y 축과 접하려면 $\textcircled{7}$ 의

식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D = 0$

$$\therefore D = b^2 - 4c = 0$$

4. 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-5, 0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x = -1$

② $x = -2$

③ $x = -3$

④ $x = -4$

⑤ $x = -5$

해설

구하는 접선의 방정식은 $-5 \cdot x + 0 \cdot y = 25$

$$-5x = 25$$

$$\therefore x = -5$$

5. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$

② $4x^2 - 7x + 3$

③ $4x^2 - 4x + 5$

④ $4x^2 - 8x + 2$

⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.

몫: $4x^2 - x - 2$, 나머지: $-5x + 3$

$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

6. 다항식 $x^3 - 2$ 를 $x^2 - 2$ 로 나눈 나머지는?

① 2

② -2

③ $-2x - 2$

④ $2x + 2$

⑤ $2x - 2$

해설

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 - 2} = \frac{x^3 - 2x + 2x - 2}{x^2 - 2} = x + \frac{2x - 2}{x^2 - 2}$$

∴ 몫은 x , 나머지는 $2x - 2$

7. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 2x - 1 \geq 9 \\ 4x - 16 < 3x - 4 \end{cases}$ 의 해가 되는 것을 모두 고르면?

① 1

② 5

③ 7

④ 12

⑤ 13

해설

$$2x - 1 \geq 9, x \geq 5$$

$$4x - 16 < 3x - 4, x < 12$$

$$\therefore 5 \leq x < 12$$

따라서 해당되는 x 의 값은 ②, ③이다.

8. 부등식 $|x - 1| + |x - 3| < 6$ 의 해와 같은 해를 갖는 이차부등식으로 옳은 것은?

① $x^2 - 4x - 5 < 0$

② $x^2 - 4x + 3 < 0$

③ $x^2 - 6x + 5 < 0$

④ $x^2 - 4x + 3 \leq 0$

⑤ $x^2 - 8x + 15 \leq 0$

해설

(i) $x < 1$ 일 때, $-x + 1 - x + 3 < 6$

$$x > -1 \quad \therefore -1 < x < 1$$

(ii) $1 \leq x < 3$ 일 때, $x - 1 - x + 3 < 6$

$$2 < 6 \quad \therefore 1 \leq x < 3$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때, $x - 1 + x - 3 < 6$

$$x < 5 \quad \therefore 3 \leq x < 5$$

$$\therefore -1 < x < 5$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 5) < 0, x^2 - 4x - 5 < 0$$

9. 모든 실수 x 에 대하여 $a(x^2 + 2x + 2) \geq 2x^2 + 4x + 5$ 가 성립할 때 a 의 최솟값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$a(x^2 + 2x + 2) \geq 2x^2 + 4x + 5$ 에서

$$(a-2)x^2 + 2(a-2)x + (2a-5) \geq 0$$

이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$a-2 > 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

판별식 $\frac{D}{4} = (a-2)^2 - (a-2)(2a-5) \leq 0$ 이므로

$$a^2 - 4a + 4 - (2a^2 - 9a + 10)$$

$$= a^2 - 4a + 4 - 2a^2 + 9a - 10$$

$$= -a^2 + 5a - 6$$

$$= -(a^2 - 5a + 6)$$

$$= -(a-2)(a-3) \leq 0$$

따라서 $(a-2)(a-3) \geq 0$ 이므로

$$a \leq 2 \text{ 또는 } a \geq 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a \geq 3$

따라서 a 의 최솟값은 3

10. $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(-1, -2)$, B $(2, 5)$, C $(7, 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① $G\left(\frac{4}{3}, 1\right)$

② $G\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$

③ $G\left(2, \frac{8}{3}\right)$

④ $G\left(\frac{8}{3}, 1\right)$

⑤ $G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, 4\right), \left(3, \frac{1}{2}\right)$$

구하고자 하는 무게중심의 좌표를 $G(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 3}{3}, y = \frac{\frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}}{3}$$

$$\therefore x = \frac{8}{3}, y = 2$$

$$\therefore G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$$

11. 원 $x^2 + y^2 - 2kx + ky + 3k = 0$ 의 중심이 $(4, -2)$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 $(4, -2)$ 이므로

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 - r^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

이때, 원 $\textcircled{7}$ 과 원 $x^2 + y^2 - 2kx + ky + 3k = 0$ 이 같으므로

$$-2k = -8, \quad k = 4$$

$$3k = 20 - r^2$$

$$\therefore k = 4, \quad r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

12. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a - b$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 + ax^2 + x + b \\ &= (x^2 - x + 1)(2x + c) \\ &= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c \\ \therefore & a = c - 2, \quad 1 = 2 - c, \quad b = c \\ & c = 1 \text{ 이므로 } a = -1, b = 1 \\ \therefore & a - b = -2 \end{aligned}$$

13. $\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1 - \sqrt{2}$

② $-1 - \sqrt{2}$

③ $(1 + \sqrt{2})i$

④ $-(1 + \sqrt{2})i$

⑤ $(1 - \sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2} + 1) \times (-i) \\ &= -(1 + \sqrt{2})i\end{aligned}$$

14. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -1, 5 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① 45

② 20

③ -5

④ -20

⑤ -45

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -1, 5 이므로

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\&= a(x+1)(x-5) \\&= a(x^2 - 4x - 5) \\&= a(x-2)^2 - 9a\end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$$\therefore a = -1$$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 4x + 5$ 이고

$b = 4, c = 5$ 이다.

$$\therefore abc = -1 \times 4 \times 5 = -20$$

15. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = -1$$

16. 연립부등식 $\begin{cases} 5(2+x) + 9 \leq -1 \\ 3(ax+1) - 2x \geq -1 \end{cases}$ 을 풀었더니 그 해가 $x = -4$

이었을 때, a 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 5

해설

$$5(2+x) + 9 \leq -1$$

$$10 + 5x + 9 \leq -1$$

$$5x \leq -1 - 19$$

$$x \leq -4$$

이므로 해가 $x = -4$ 이기 위해서는 다음 부등식의 해는 $x \geq -4$ 이어야 하므로

$$3(ax+1) - 2x \geq -1$$

$$3ax + 3 - 2x \geq -1$$

$$(3a-2)x \geq -4$$

$$3a-2=1 \quad \therefore a=1$$

17. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z = x + yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z} = 3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x

② y

③ $x + y$

④ $x - y$

⑤ $2x + y$

해설

$$z = x + yi, \bar{z} = x - yi \text{ 이므로}$$

$$z \cdot \bar{z} = 3 \text{ 이면 } \bar{z} = \frac{3}{z} \text{ 을 대입}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(z + \frac{3}{z} \right) &= \frac{1}{2} (z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} (x + yi + x - yi) \\ &= x \end{aligned}$$

18. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1

② $\frac{3}{2}$

③ 2

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

(주어진 식) = 0 이라 놓고 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$$

근의 공식에서

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2} \\ &= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

주어진 식이 x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식(= D) 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

19. 두 부등식 $3x - 4 < x + 6$ 과 $1 - 3x \leq -5$ 를 모두 만족하는 수 중에서 가장 작은 정수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$3x - 4 < x + 6, x < 5$$

$$1 - 3x \leq -5, 2 \leq x < 5$$

따라서 모두 만족하는 수는 $2 \leq x < 5$ 이므로 가장 작은 정수는 2이다.

20. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2 : 1$ 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle PAB$ 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

이때, $\triangle PAB$ 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

