

1. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?
- ① $\emptyset$ ② $\{0, 1\}$ ③ $\{3, 4, 5\}$
④ $\{2, 3, 4, 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
 $x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
 $x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
 $x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
 $x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$

2. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \cup Q = U$
- ② $P \cap Q = \emptyset$
- ③ $Q \subset P$
- ④ $P \subset Q$
- ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

3. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 ‘ ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.’를 증명한 것이다.

a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
 $ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(2mn - m - n) + 1$
이때, $2mn - m - n$ 이 ’ 이므로, ab 는 이다.
따라서, ‘ a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.’는 참이고 이것은 주어진 명제의 이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① 자연수, 홀수, 역
- ② 정수, 짝수, 대우
- ③ 정수, 홀수, 대우
- ④ 유리수, 짝수, 이
- ⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

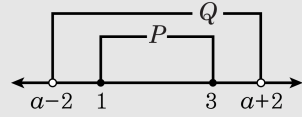
a, b 를 모두 홀수라 하면
 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
 $ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(2mn - m - n) + 1$
이때, $2mn - m - n$ 이 이므로 ab 는 이다. 이것은 주어진 명제의 가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

4. 두 조건 $p : 1 \leq x \leq 3$, $q : |x - a| < 2$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 가 참이 되도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $1 < a < 3$ ② $1 \leq a < 3$ ③ $1 < a \leq 3$
 ④ $1 \leq a \leq 3$ ⑤ $2 < a \leq 3$

해설

$$p \rightarrow q \Rightarrow P \subset Q, |x - a| < 2 \Leftrightarrow a - 2 < x < a + 2$$



$$\therefore a - 2 < 1 \text{ 그리고 } 3 < a + 2$$

$$\therefore 1 < a < 3$$

5. 실수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.'가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, ' $x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.'가 참이므로
 $4a + 2a^2 - 6 = 0$, $2a^2 + 4a - 6 = 0$,
 $a^2 + 2a - 3 = 0$, $(a + 3)(a - 1) = 0$
 $\therefore a = -3$ 또는 $a = 1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

6. 두 조건 $p : |x - 1| = 2$, $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이
 $P = \{-1, 3\}$, $Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

7. $a > 0, b > 0, a + b = 4$ 일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때,
 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 이므로
 $a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}, 0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab 의 최댓값은 4

8. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

9. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

- ① $b = 2a$
- ② $a = 2b$
- ③ $a = b$
- ④ $a^2 = b$
- ⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$
 $\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$
이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립
 $\therefore b = 2a$

10. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(4a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 9b\right)$ 의 최솟값은?

① 13

② 17

③ 21

④ 25

⑤ 27

해설

$$\begin{aligned}\left(4a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 9b\right) &= 4 + 36ab + \frac{1}{ab} + 9 \\ &= 13 + 36ab + \frac{1}{ab}\end{aligned}$$

$ab > 0, \frac{1}{ab} > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$36ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{36ab \times \frac{1}{ab}} = 12$$

$\therefore$ 최솟값은 $13 + 12 = 25$