1. 좌표평면에서 두 점 A(7, 2), B(3, 5) 사이의 거리를 구하여라.

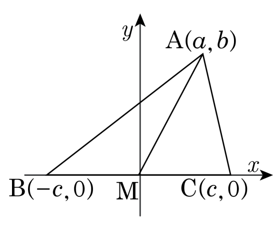
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 점 A(7, 2), B(3, 5) 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(3-7)^2+(5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

2. 다음은 △ABC 에서 변 BC 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(-c,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$ 라 하면
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$(나)
> $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$(다)$(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

$\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(-c,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\,(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

3. 두 점 $A(-2, 0)$, $B(7, 0)$에서 $\overline{AB}$를 $2 : 1$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는?

① $P(4, 0)$, $Q(16, 0)$　　② $P(2, 0)$, $Q(-16, 0)$

③ $P(4, 0)$, $Q(-8, 0)$　　④ $P(4, 0)$, $Q(4, 0)$

⑤ $P(-4, 0)$, $Q(16, 0)$

해설

내분점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{-2\times 1+7\times 2}{2+1}, \frac{0\times 1+0\times 2}{2+1}\right)$$

$\therefore$ $P(4, 0)$

외분점 Q 의 좌표는

$$Q\left(\frac{2\times 1+7\times 2}{2-1}, \frac{-0\times 1+0\times 2}{2-1}\right)$$

$\therefore$ $Q(16, 0)$

4. 세 점 A(3, 4) , B(−2, −2), C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $\left(2,\ \frac{2}{3}\right)$일 때, 점 C의 좌표는?

① (5, 0) ② (−5, 1) ③ (5, 1)
④ (6, 0) ⑤ (−6, 1)

해설

C$(a,\ b)$라 하면

$\left(2,\ \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3-2+a}{3},\ \frac{4-2+b}{3}\right)$

$\therefore (a,\ b) = (5,\ 0)$

5. 두 점 $(3,\ 2)$, $(4,\ 5)$를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 3 인 직선의 방정식은?.

① $y = 3x - 9$　② $y = -3x + 9$　③ $y = -3x - 3$
④ $y = \frac{1}{3}x - 9$　⑤ $y = 3x + 5$

해설

두 점 $(3,\ 2)$, $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y - 2 = \frac{5-2}{4-3}(x-3)$

따라서 구하고자 하는 직선의 방정식은 기울기가 3 이고 x 절편이 3 이므로

$y = 3(x-3)$　$\therefore\ y = 3x - 9$

6. 세 점 $A(-1, 4)$, $B(0, 1)$, $C(a, -5)$가 한 직선 위에 있도록 a의 값을 정하면?

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

해설

한 직선위에 있으려면 기울기가 같아야 한다.

$\therefore\ \frac{4-1}{-1-0} = \frac{1-(-5)}{0-a}$

$\Rightarrow\ a = 2$

7. 다음 보기 중 직선 $y = -2x + 5$ 와 수직인 직선을 모두 고르면?

보기

ㄱ $4x - 2y = 3$　　ㄴ $x - 2y = 1$

ㄷ $y = \frac{1}{2}x + 3$　　ㄹ $y = -2x - 5$

① ㄱ, ㄴ　　② ㄱ, ㄷ　　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

직선 $y = -2x + 5$ 와 서로 수직이려면
기울기의 곱이 -1 이어야 한다.
따라서, 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8. 직선 $x + ay - 1 = 0$이 직선 $3x + by + 1 = 0$과 수직이고, 직선 $x - (b+3)y + 1 = 0$과 평행일 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설

$x + ay - 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠,
$3x + bx + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
$x - (b-3)y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉠⊥㉡ : $1 \cdot 3 + a \cdot b = 0$에서 $ab = -3$
㉠ // ㉢ : $\frac{1}{1} = \frac{-(b+3)}{a} \neq \frac{1}{-1}$에서 $a + b = -3$
$\therefore\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
$= (-3)^2 - 2 \cdot (-3) = 15$

9. 직선 $(a-2)y = 3(a-1)x-1$ 이 실수 a 의 값에 관계없이 반드시 지나는 사분면은?

① 제 1 사분면

② 제 1 사분면 또는 제 2 사분면

③ 제 2 사분면

④ 제 3 사분면

⑤ 제 4 사분면

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$(3x-y)a-3x+2y-1=0$

따라서, $3x-y=0,\ -3x+2y-1=0$ 에서

$x=\frac{1}{3},\ y=1$

주어진 직선은 항상 제 1 사분면 위의 점 $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$ 을 지난다.

10. 점 $(2, -3)$ 과 직선 $3x - 4y + 1 = 0$ 사이의 거리는?

① $\frac{19}{5}$　② $\frac{14}{5}$　③ $\frac{19}{4}$　④ $\frac{16}{3}$　⑤ $\frac{19}{7}$

해설

$\therefore\ d = \frac{|\,3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 1\,|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{19}{5}$

11. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2b+a)$, $\mathrm{B}(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, a^2+b^2 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(-a-a)^2+\{a-(2b+a)\}^2}\\ &= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

12. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0,\ 6)$ ② $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 6)$

③ $P(3.6,\ 0)$, $Q(0,\ 6)$ ④ $P(2.4, 0)$, $Q(0,\ 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 2)$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $P(x,\ 0)$ 과 $Q(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ P(3.6,\ 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6 \ \therefore\ Q(0,\ 6)$

13. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$　② $(2, 4)$　③ $(3, 5)$
④ $(5, 3)$　⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{\mathrm{AD}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점은 일치한다.

$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$

$\therefore a = 4, b = 2$

14. 좌표평면 위의 점 A$(3, -2)$, B$(4, 5)$, C$(-1, 3)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 할 때 $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

□ABCD는 평행사변형이므로
대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 (x, y) 라고 하면
$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$
$\therefore\ x = -2,\ y = -4$
따라서 점 D의 좌표는 $(-2, -4)$

15. 세 점 A $(1, 5)$, B $(-4, -7)$, C $(5, 2)$ 가 좌표평면 위에 있다. $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$
② $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
③ $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$
⑤ $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13,\ \overline{AC} = 5$
따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 13 : 5 로 내분한 점
$\therefore\ \left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

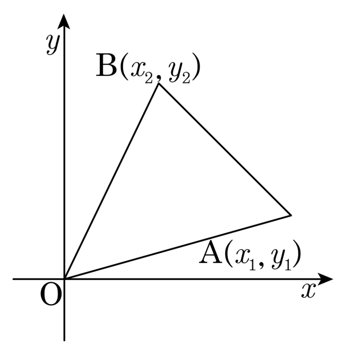
16. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.
$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$
$\therefore\ k = 0$
이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$
$\therefore\ a = 1,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 2$

17. 원점 O(0, 0)와 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$　② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$　③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$　⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 B$(x_2,\ y_2)$에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$이다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

18. 복소수 $z=a+bi$를 좌표평면 위의 점 P$(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, $a,\ b$는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원 ② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선 ④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$(2-3i)z=(2-3i)(a+bi)$
$=(2a+3b)+(2b-3a)i\cdots$㉠

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$\therefore\ b=\dfrac{3}{2}a$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

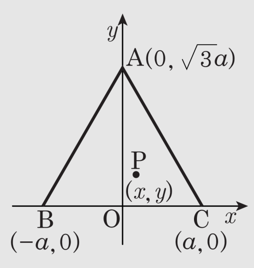
19. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형　　② 직선　　③ 선분

④ 원　　⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이므로

$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$

$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

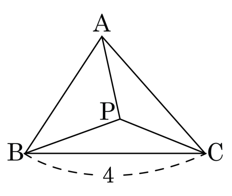
20. 세 점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ -3)$, $C(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{CP}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면
주어진 조건에서,
$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$
$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$
$2x^2-2x+2y^2+6y+14$
$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$
$18x+18y-54=0$
$\Rightarrow\quad x+y-3=0$
$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

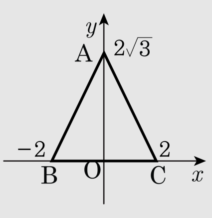
21. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정삼각형 ABC 의 임의의 내부의 한 점 P 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 의 최솟값은?



① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축,
$\overline{BC}$ 의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y축으로 잡으면
A $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$, B $(-2, 0)$, C $(2, 0)$



P (x, y) 라 하면

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$
$$=x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$$
$$=3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$$
$$=3x^2+3\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 은

$x=0, y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최솟값 16 을 갖는다.

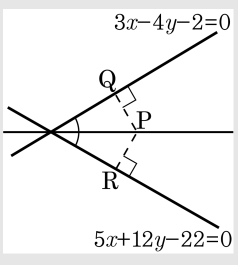
22. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $P(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{PQ}=\overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는
$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
$\therefore\ x-8y+6=0$
$\therefore a+b+c=-1$

23. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$ ② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$ ④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를
$\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,
$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\frac{x-2}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로
$X=\frac{x-2}{2}$, $Y=\frac{y+3}{2}$
$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$
이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면
$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$
$4X+2Y-3=0$
$\therefore\ 4x+2y-3=0$