

1. 좌표평면에서 두 점 $A(7, 2)$, $B(3, 5)$ 사이의 거리를 구하여라.

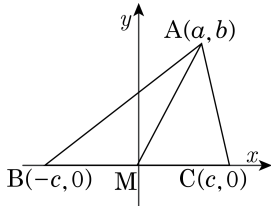
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 점 $A(7, 2)$, $B(3, 5)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(3-7)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

2. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x 축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 라 하면

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (a+c)^2 + b^2 + (a-c)^2 + b^2 = (\text{가}) \text{ 이고,}$$

$$\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$$

따라서 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = (\text{나})$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (\text{다})(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

위

의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, 1$
- ② $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 1$
- ③ $2(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 2$
- ④ $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 2$
- ⑤ $3(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 3$

해설

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$= \{(-c-a)^2 + (0-b)^2\} + \{(c-a)^2 + (0-b)^2\}$$

$$= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2)$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

3. 두 점 A $(-2, 0)$, B $(7, 0)$ 에서 $\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점 P 와 외분하는 점 Q 의 좌표는?

① $P(4, 0), Q(16, 0)$

② $P(2, 0), Q(-16, 0)$

③ $P(4, 0), Q(-8, 0)$

④ $P(4, 0), Q(4, 0)$

⑤ $P(-4, 0), Q(16, 0)$

해설

내분점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{-2 \times 1 + 7 \times 2}{2 + 1}, \frac{0 \times 1 + 0 \times 2}{2 + 1}\right)$$

$$\therefore P(4, 0)$$

외분점 Q 의 좌표는

$$Q\left(\frac{2 \times 1 + 7 \times 2}{2 - 1}, \frac{-0 \times 1 + 0 \times 2}{2 - 1}\right)$$

$$\therefore Q(16, 0)$$

4. 세 점 $A(3, 4)$, $B(-2, -2)$, C 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표가 $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ 일 때, 점 C 의 좌표는?

① $(5, 0)$

② $(-5, 1)$

③ $(5, 1)$

④ $(6, 0)$

⑤ $(-6, 1)$

해설

$C(a, b)$ 라 하면

$$\left(2, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3 - 2 + a}{3}, \frac{4 - 2 + b}{3}\right)$$

$$\therefore (a, b) = (5, 0)$$

5. 두 점 (3, 2), (4, 5)를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 3 인 직선의 방정식은?.

① $y = 3x - 9$

② $y = -3x + 9$

③ $y = -3x - 3$

④ $y = \frac{1}{3}x - 9$

⑤ $y = 3x + 5$

해설

두 점 (3, 2), (4, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{4 - 3}(x - 3)$$

따라서 구하고자 하는 직선의 방정식은 기울기가 3 이고 x 절편이 3 이므로

$$y = 3(x - 3) \quad \therefore y = 3x - 9$$

6. 세 점 $A(-1, 4)$, $B(0, 1)$, $C(a, -5)$ 가 한 직선 위에 있도록 a 의 값을 정하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

한 직선위에 있으려면 기울기가 같아야 한다.

$$\therefore \frac{4-1}{-1-0} = \frac{1-(-5)}{0-a}$$

$$\Rightarrow a = 2$$

7. 다음 보기 중 직선 $y = -2x + 5$ 와 수직인 직선을 모두 고르면?

보기

㉠ $4x - 2y = 3$

㉡ $x - 2y = 1$

㉢ $y = \frac{1}{2}x + 3$

㉣ $y = -2x - 5$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

직선 $y = -2x + 5$ 와 서로 수직이려면
기울기의 곱이 -1 이어야 한다.

따라서, 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 것은 ㉡, ㉣이다.

8. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 이 직선 $3x + by + 1 = 0$ 과 수직이고, 직선 $x - (b + 3)y + 1 = 0$ 과 평행일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 10

② 12

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

$$x + ay - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠},$$

$$3x + bx + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x - (b - 3)y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \perp \textcircled{㉡} : 1 \cdot 3 + a \cdot b = 0 \text{에서 } ab = -3$$

$$\textcircled{㉠} \parallel \textcircled{㉢} : \frac{1}{1} = \frac{-(b+3)}{a} \neq \frac{1}{-1} \text{에서 } a + b = -3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$= (-3)^2 - 2 \cdot (-3) = 15$$

9. 직선 $(a-2)y = 3(a-1)x - 1$ 이 실수 a 의 값에 관계없이 반드시 지나는 사분면은?

- ① 제 1사분면
- ② 제 1사분면 또는 제 2사분면
- ③ 제 2사분면
- ④ 제 3사분면
- ⑤ 제 4사분면

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$(3x - y)a - 3x + 2y - 1 = 0$$

따라서, $3x - y = 0$, $-3x + 2y - 1 = 0$ 에서

$$x = \frac{1}{3}, y = 1$$

주어진 직선은 항상 제 1 사분면 위의 점 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 을 지난다.

10. 점 $(2, -3)$ 과 직선 $3x - 4y + 1 = 0$ 사이의 거리는?

① $\frac{19}{5}$

② $\frac{14}{5}$

③ $\frac{19}{4}$

④ $\frac{16}{3}$

⑤ $\frac{19}{7}$

해설

$$\therefore d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{19}{5}$$

11. 두 점 $A(a, 2b + a)$, $B(-a, a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(-a - a)^2 + \{a - (2b + a)\}^2} \\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

12. 두 점 $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 와 y 축 위의 점 Q 의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0, 6)$

② $P(3.6, 0)$, $Q(-1, 6)$

③ $P(3.6, 0)$, $Q(0, 6)$

④ $P(2.4, 0)$, $Q(0, 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1, 2)$

해설

$A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 $P(x, 0)$ 과 $Q(0, y)$ 를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2 + 2^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \therefore P(3.6, 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{1^2 + (y-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore Q(0, 6)$

13. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$ 에 대하여 사각형 ABCD 가 평행사변형이 되도록 D 의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$

② $(2, 4)$

③ $(3, 5)$

④ $(5, 3)$

⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b) 라 두면 평행사변형의 성질로부터 대각선 $\overline{AD}$ 의 중점과 $\overline{BC}$ 의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore a = 4, b = 2$$

14. 좌표평면 위의 점 $A(3, -2)$, $B(4, 5)$, $C(-1, 3)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 $ABCD$ 의 나머지 꼭짓점 D 의 좌표를 (x, y) 라 할 때 $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

□ $ABCD$ 는 평행사변형이므로

대각선 AC 의 중점과 대각선 BD 의 중점이 일치한다.

점 D 의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{-2 + 3}{2} \right) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{5 + y}{2} \right)$$

$$\therefore x = -2, y = -4$$

따라서 점 D 의 좌표는 $(-2, -4)$

15. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

- ① (0, 0) ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

16. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$$x^2 - x + 1 = x + k \text{ 에서 } \frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

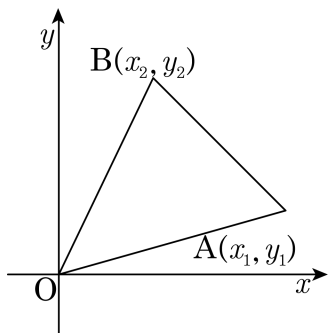
이때, $x = 1, y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1, 1)$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

17. 원점 $O(0, 0)$ 와 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 로 이루어진 삼각형 OAB 의 넓이는?



- ① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
 ④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$$\therefore y_1x - x_1y = 0$$

점 $B(x_2, y_2)$ 에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$ 까지의 거리 h 는

$$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ 이다.}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$$

19. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형

② 직선

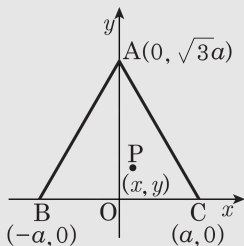
③ 선분

④ 원

⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$ 이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로}$$

$$2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\}$$

$$= (x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2$$

$$\text{정리하여 간단히 하면, } y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$\therefore$ 직선

20. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
주어진 조건에서,

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2 = 2\{(x-5)^2 + (y-3)^2\}$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$$

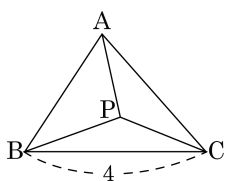
$$= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$$

$$18x + 18y - 54 = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$$

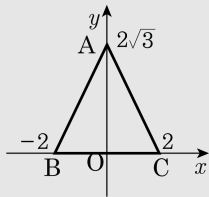
21. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 최솟값은?



- ① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x 축,
 $\overline{BC}$ 의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y 축으로 잡으면
 $A(0, 2\sqrt{3}), B(-2, 0), C(2, 0)$



$P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 + (x + 2)^2 + y^2 + (x - 2)^2 + y^2$$

$$= 3x^2 + 3y^2 - 4\sqrt{3}y + 20$$

$$= 3x^2 + 3\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 16$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은

$x = 0, y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최솟값 16을 갖는다.

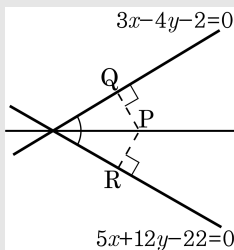
22. 두 직선 $3x - 4y - 2 = 0$, $5x + 12y - 22 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

즉, $13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22)$ 또는

$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22)$ 정리하면

$x - 8y + 6 = 0$ 또는 $8x + y - 17 = 0$ 에서

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

23. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x + 2y - 3 = 0$

② $2x + 3y + 1 = 0$

③ $4x - 3y + 1 = 0$

④ $x - 4y - 3 = 0$

⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를 P(X, Y)라 하면,

$$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$$

$$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$$

이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면

$$2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$$

$$4X + 2Y - 3 = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$$