1. 명제 '$p(x)$ 이면 $q(x)$ 가 아니다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $Q \subset P$ ③ $P \subset Q^c$
④ $Q^c \subset P$ ⑤ $P \cup Q = P$

해설

'q 가 아니다'를 만족시키는 집합은 Q^c
따라서 'p 이면 q 가 아니다'가 참이면 $P \subset Q^c$

2. 명제 ‘모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.’를 부정한 것은?

① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.

② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여$xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$이고 $yz \neq zx$ 이다.

④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$이고 $zx \neq xy$ 이다.

⑤ 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

‘$xy = yz = zx$’ 는 ‘$xy = yz$ 이고 $yz = zx$이고 $zx = xy$’ 이므로 ‘$xy = yz = zx$’의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

3. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $r \Rightarrow p$　　② $\sim p \Rightarrow \sim s$　　③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$　　⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

4. 다음 명제 중 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것은? ($a,\ b,\ x,\ y$는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : x$ 는 3 의 배수, $q : x$ 는 6 의 배수

③ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

④ $p : |x - 1| = 2,\ q : x^2 - 2x + 3 = 0$

⑤ $p : a < b,\ q : |a| < |b|$

해설

$q \Rightarrow p$ 즉 $Q \subset P$인 것을 고른다.
② $q : x$ 는 6 의 배수 $\Rightarrow p : x$는 3의 배수 (참)

5. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A-(A-B)=A$ 이기 위한 필요충분조건이 <u>아닌</u> 것은?

① $A \subset B$ ② $A^c \subset B^c$ ③ $A-B=\varnothing$

④ $A \cup B = B$ ⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

$$\begin{aligned} A-(A-B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$\therefore\ A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$

6. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$일 때,

부등식 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \square$가 항상 성립한다. □ 안에 알맞은 최댓값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 12

해설

$a,\ b,\ c$ 가 모두 양수이므로

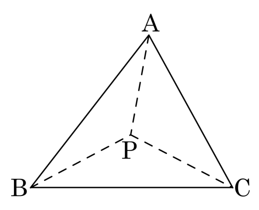
$a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$

따라서

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc}$$

$$= \frac{8abc}{abc} = 8$$

7. 넓이가 a인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCA의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때 $S_1^2+S_2^2+S_3^2$의 최솟값은?



① $\dfrac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$

해설

$S_1+S_2+S_3=a$

$(1^2+1^2+1^2)(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\geq(S_1+S_2+S_3)^2=a^2$

$\therefore S_1^2+S_2^2+S_3^2\geq\dfrac{a^2}{3}$

8. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

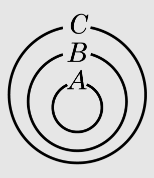
② $A \subset B$, $B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

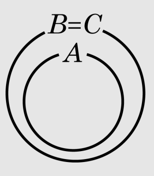
③ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = C$ 이다.

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

① 

② 

③ 예를 들어 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3\}$ 이면 $A \subset B$, $B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 X 에 대하여, 집합 $B = \{2, 4, 7\}$, $B \cap X \neq \phi$ 일 때, 집합 X 의 개수를 구하라.

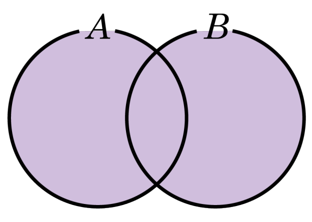
▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

원소 개수가 n 개 인 집합의 부분집합 개수는 2^n 개 이다.
$\Rightarrow$ 집합 A 의 부분집합의 개수 : $2^5 = 32$
먼저 $B \cap X = \phi$ 인 경우를 계산해 보면$\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합의 개수, 즉 $2^3 = 8$ 이 된다.$\therefore$ $B \cap X \neq \phi$ 인 부분집합 X 의 개수는 $32 - 8 = 24$(개)

10. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 24\}$, $B=\{4\times x \mid x\in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 96

해설

$B=\{4\times x \mid x\in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.
원소나열법으로 고쳐보면,
$B=\{4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 96\}$ 이 된다.
색칠한 부분의 원소는 $\{1, 2, 4, 8, 16, 24, 32, 64, 96\}$ 이다.
이때, 가장 큰 원소는 96 이다.

11. 다음 [보기] 에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $n(\{0\}) = 0$	㉡ $\phi \subset \{\varnothing\}$	㉢ $4 \subset \{1,\ 2\}$
㉣ $0 \subset \{0\}$	㉤ $0 \in \varnothing$	㉥ $0 \notin \varnothing$

① ㉡,㉥ ② ㉡,㉤ ③ ㉠,㉡ ④ ㉢,㉤ ⑤ ㉤,㉦

해설

㉠ $n\{(0)\} = 1$
㉢ $4 \notin \{1, 2\}$
㉣ $0 \in \{0\}$
㉤ $0 \notin \varnothing$

12. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16\}$, $B = \{1, 3, 8, 10, 13, 16\}$ 이고 $B \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $B \subset X$
② $X \subset (A \cup B)$
③ $(A \cap B) \subset X \subset B$
④ $(A \cap B) \subset X \subset A$
⑤ $\{10,\ 13\} \subset X$

해설

$B \cap X = X$ 일 때 $X \subset B$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

① $X \subset B$ 이므로 옳지 않다.

④ $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이지만 $X \subset A$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 라고 할 수 없다.

⑤ $\{10,\ 13\} \subset A \cap B$ 이므로 $\{10, 13\} \subset X$ 이다.

13. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$ 이고, 집합 $A\cap B$ 의 모든 원소의 합이 10 일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$,
$\rightarrow A=B$,
$\rightarrow A\cap B=A=B$,
$A\cap B$ 의 모든 원소의 합이 10 이므로,
집합 A 의 모든 원소의 합은 10

14. $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 $A = \{2,\ 3\}$, $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$을 만족시키는 집합 B의 개수는?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개　④ 16 개　⑤ 32 개

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$

$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$

$= (A - B) \cup (B - A)$

$= B - A$

따라서 $A - B \subset B - A$, $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로 소이므로

$A - B = \phi$,　$A \subset B$

$\therefore B$는 2, 3을 포함하는 U의 부분집합이므로 B의 개수는 $2^3 =$ 8(개)

15. 전체집합 $U = \left\{x | x\text{는 한 자리 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $A^c = \{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $A^c \cap B^c = \{7,\ 9\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = U - A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
$A - B = \{1, 3, 5\}$
$\therefore (A - B)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

16. 전체집합 U 의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 집합연산이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

② $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

③ $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

④ $(A\cup C)-(B\cup C)=A-(B\cup C)$

⑤ $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cup C)$

해설

① (좌변)
$=(A-B)\cup(A-C)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=A\cap(B^c\cup C^c)$
$=A\cap(B\cap C)^c$ ($\because$ 분배법칙과 드 모르간의 법칙)
$=A-(B\cap C)$
=우변 ($\because$ 차집합의 성질)
② (우변)
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ($\because$ 차집합의 성질)
벤다이어그램을 그려보면 좌변과 같음을 확인할 수 있다.
③ (좌변)
$=(A-C)\cup(B-C)$
$=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=(A\cup B)\cap C^c$
$=(A\cup B)-C$ (우변) ($\because$ 분배법칙과 차집합의 성질)
④ 좌변
$=(A\cup C)-(B\cup C)$
$=(A\cup C)\cap(B\cup C)^c$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B\cup C)^c]$ ($\because$ 분배법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B^c\cap C^c)]$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup\varnothing$
$=A\cap(B\cup C)^c$
$=A-(B\cup C)$ (우변)
⑤ 좌변
$=A-(B-C)=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A\cap(B^c\cup C)$ ($\because$ 차집합의 성질과 드 모르간의 법칙)
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=(A-B)\cup(A\cap C)\neq$ 우변 $\rightarrow$ 모두를 벤다이어그램을 그려서 비교할 수 있다.

17. 실수 전체의 집합 R의 한 부분집합 S 에 대하여 $P = \{x \in S \mid -\frac{1}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2}\}$이라고 할 때, 다음 중 참인 명제는?

① $S = R$이면, P는 공집합이다.

② $S = R$이면, P는 유한집합이다.

③ S 가 유리수 전체의 집합이면, P는 유한집합이다.

④ S 가 정수 전체의 집합이면, P는 유한집합이다.

⑤ S 가 자연수 전체의 집합이면, P는 무한집합이다.

해설

$-\frac{1}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2}$ 에서 $1 - \frac{1}{2} \leq x \leq 1 + \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 여기서 x가 정수이면 $x = 1$

즉, P 는 유한집합이 된다.

18. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 에 대하여 명제 '$x \in A$이면 $\frac{1}{2}x \in A$ 이다.' 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{2} \in A$ 이면 $0 \in A$ 이다.
② $x \in A$ 이고 $y \in A$ 이면 $x + y \in A$ 이다.
③ $x \in A$ 이고 $y \in A$ 이면 $xy \in A$ 이다.
④ A 가 유한집합이면 $2 \notin A$ 이다.
⑤ A 가 무한집합이면 $0 \in A$ 이다.

해설

A 가 유한집합이 되는 경우는 $A = \{0\}$ 일 때 뿐이다.

19. $A = \{\varnothing,\ \{a\},\ b,\ \{c, d\},\ e\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\{a\} \in A$　　② $\varnothing \in A$　　③ $\{c,\ d\} \subset A$

④ $n(A) = 5$　　⑤ $\{b,\ e\} \subset A$

해설

③ $\{c,\ d\} \in A$

20. 네 집합 $A = \{x \mid x$는 36의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 6의 배수$\}$, $C = \{x \mid x$는 a의 약수$\}$, $D = \{x \mid x$는 a의 배수$\}$ 에 대하여 $C \subset A$, $D \subset B$ 가 동시에 성립하기 위한 a 의 값을 모두 구하여라. (단 $a > 0$)

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 6

▷ 정답: 12

▷ 정답: 18

▷ 정답: 36

해설

$C \subset A$ 이므로 a 는 36 의 약수
$D \subset B$ 이므로 a 는 6 의 배수
$\therefore\ a = 6,\ 12,\ 18,\ 36$

21. $n(A) = 3$ 인 집합 A 에 대하여 집합 $P = \{X | X \subset A\}$ 일 때, 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 255 개

해설

집합 P 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 가지므로
$n(P) = 2^3 = 8$,
따라서 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수는
$2^8 - 1 = 255$ (개)

22. 집합 $A_k = \left\{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 } k\text{의 배수}\right\}$ 이라 정의한다. 집합 $P = \{xy|x \in A_2,\ y \in A_3\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

- $X \subset P$
- $X \cap \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$
$= \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 512 개

해설

$A_k = \left\{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 } k\text{의 배수}\right\}$,
$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_3 = \{3, 6, 9\}$,
$P = \{xy|x \in A_2,\ y \in A_3\} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 54, 60, 72, 90\}$
,
$X \subset P$, $\{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\} = \{24, 48\}$ 이므로
$X \cap \{xy|x \in A_4, y \in A_6\} = \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$, $\{24, 48\} \subset X$
따라서 집합 X 는 집합 P 의 부분집합 중, 24 , 48 을 반드시 포함하는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는 $2^{11-2} = 512$ (개)

23. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = n(C)$ 이고, $(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $n(A - C) = 0$

② $\dfrac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C)$

③ $n(A \cap C) = n(B)$

④ $\dfrac{n(A) + n(C)}{2} = n(B)$

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$ 이면 $A - B = \varnothing,\ B - C = \varnothing$ 이므로
$A \subset B,\ B \subset C$
또, $n(A) = n(C)$, $A \subset C$ 이므로 $A = C$
따라서 $A = B = C$
① $n(A - C) = 0 \to A = C$ 이므로 옳다.
② $\dfrac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C) \to 1 \times n(B) = n(C)$ 이므로 옳다.
③ $n(A \cap C) = n(B) \to$옳다.
④ $\dfrac{n(A) + n(C)}{2} = n(B) \to$옳다.
⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C) \to n((A \cap C) - B) = 0$ 이므로 옳지 않다.

24. 어느 학급의 키가 큰 순위별로 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E 를 불러서 이들 다섯 명에게 키의 순위를 물었더니 다음 표와 같이 대답하였다. 이들이 모두 두 사람의 순위를 대답했지만 두 사람의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 이들의 대답으로 미루어 실제로 키가 제일 큰 사람은?

	A	B	C	D	E
1		B			A
2	D	C		D	
3	A		C		
4				E	E
5			B		

① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

문제에 주어진 표에서 각 열마다 하나는 옳고 하나는 틀리므로, 만일 A 열에서 D 가 2 위라면 D 열에서 E 는 4 위가 아니다. ⇒ E 열에서 A 가 1 위 ⇒ B 열에서 C 가 2 위
따라서 D 와 C 가 동시에 2 위가 되어 모순이다.
따라서 A 열에서 D 는 2 위가 아니므로 A 가 3 위이다. ⇒ C 열에서 B 가 5 위 ⇒ B 열에서 C 가 2 위 ⇒ D 열에서 E 가 4 위
따라서 A, B, C, E 는 각각 3 위, 5 위, 2 위, 4 위이므로 나머지 D가 1 위이다.

25. $x<0$인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdots\cdots$ ㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=x\cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2+$ ㉡ 하면

$3f(x)=\frac{2}{x}+x=\frac{x^2+2}{x}$

$\therefore f(x)=\frac{x^2+2}{3x}=\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}$

$x<0$이므로

$\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}\le -2\sqrt{\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{3x}}=-2\times\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$