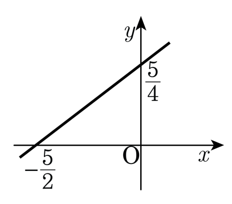
1. 두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 2 인 직선의 방정식은?

① $y = 3x - 6$　② $y = 3x - 2$　③ $y = 3x - 1$
④ $y = 3x + 6$　⑤ $y = 3x + 2$

해설

두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{4-1}{3-2} = 3$ 이므로, 구하는 직선의 기울기는 3 이고, x 절편이 2 인 직선이므로,
$y = 3(x-2)$
$\therefore\ \ y = 3x - 6$

2. 다음 도형이 나타내는 방정식을 찾으면?



① $2x - 4y + 5 = 0$

② $-\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}y = 0$

③ $2x + 4x + 5 = 0$

④ $\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}y = 0$

⑤ $4x - 2y - 5 = 0$

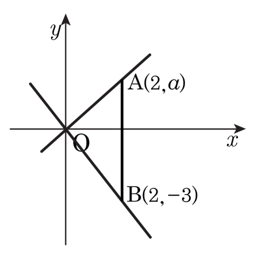
해설

기울기$= \frac{(y \text{ 증가량})}{(x \text{ 증가량})} = \frac{\frac{5}{4} - 0}{0 - \left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

$\therefore\ 2x - 4y + 5 = 0$

3. 다음 그림과 같이 원점과 점 A(2, a) 를 지나는 직선의 기울기를 m_1, 원점과 점 B(2, -3) 을 지나는 직선의 기울기를 m_2 라 하자. $m_1 \times m_2 = -1$ 일 때, a 의 값을 구하면?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$m_1 = \frac{a}{2}$, $m_2 = -\frac{3}{2}$

$m_1 \times m_2 = \frac{a}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ 이므로,

$\therefore\ a = \frac{4}{3}$

4. 직선 $x+ay+1=0$이 $x-y+1=0$과는 수직이고, $x+(2-b)y-1=0$과는 평행일 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+ay+1=0\cdots$㉠

$x-y+1=0\cdots$㉡

$x+(2-b)y-1=0\cdots$㉢

㉠⊥㉡ : $1\times1+a\times(-1)=0$

$\therefore\ a=1$

㉠//㉢ : $\frac{1}{1}=\frac{a}{2-b}\neq\frac{1}{-1}$

$\Rightarrow a=2-b$

$\Rightarrow 1=2-b$

$\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

5. 점 $(4, 5)$ 와 직선 $3x - 4y - 2 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

거리 $d = \dfrac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$

$= \dfrac{10}{5} = 2$

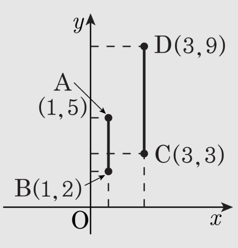
6. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \le f(1) \le 5$, $3 \le f(3) \le 9$ 라고 할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$ 를 동시에 지나야 하고

a는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a의 최댓값은 $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 기울기이고

a의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 기울기이다.

$\overline{\mathrm{BD}}$의 기울기$= \dfrac{9-2}{3-1} = \dfrac{7}{2}$

$\overline{\mathrm{AC}}$의 기울기$= \dfrac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값+최솟값$= \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore \ -1 \le a \le \dfrac{7}{2}$

7. 세 점 A $(2,\ 1)$, B $(-k+1,\ 3)$, C $(1,\ k+2)$가 같은 직선위에 있도록 하는 실수 k의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

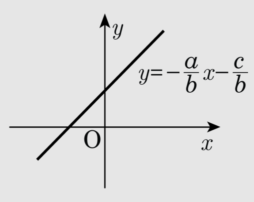
세 점 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-\mathrm{k}+1,3)$, $\mathrm{C}(1,\mathrm{k}+2)$ 가 같은 직선 위에 있으려면
직선 AB 와 AC 의 기울기가 같아야 하므로
$$\frac{3-1}{(-k+1)-2}=\frac{(k+2)-1}{1-2}$$
$$\frac{2}{-k-1}=\frac{k+1}{-1},$$
$(k+1)^2=2$,
$\therefore\ k=-1\pm\sqrt{2}$ 따라서 구하는 합은 $(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

8. $ab < 0,\ ac > 0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제 1, 2 사분면　　② 제 1, 3 사분면　　③ 제 2, 4 사분면

④ 제 2 사분면　　⑤ 제 4 사분면

해설



$ab < 0,\ ac > 0$이므로 $b \neq 0$ 이다.
따라서, 주어진 직선의 방정식을 b로 나누어 정리하면

$y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

(기울기) $= -\dfrac{a}{b} > 0$

한편, $ab < 0,\ ac > 0$이므로

$ab \cdot ac = a^2bc < 0$

따라서 $bc < 0$

(y 절편) $= -\dfrac{c}{b} > 0$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제4 사분면은 지나지 않는다.

9. 좌표평면 위에 세 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ 7)$, $C(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 $\triangle ABC$의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x+2)+1$은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$ 의 중점 $M(5, 5)$를 지나야 한다.
$\therefore\ 5 = m(5+2)+1$
$\therefore\ m = \frac{4}{7}$

10. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore\ \ 2a+b=0$

11. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

12. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow\ 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

13. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$ 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} + 2 = 0$

$\therefore b = -\sqrt{3},\ c = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore\ b+c = 2$

14. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O 라 할 때, $\triangle$OAB 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$

$\Rightarrow$ x 절편은 8 이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

15. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

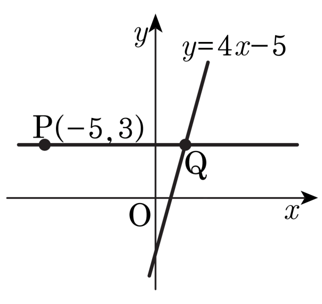
▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 2$

16. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(-5, 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는?



① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q의 y좌표가 3이므로
$y = 4x - 5$에 $y = 3$을 대입하면 $3 = 4x - 5$
$\therefore x = 2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ 3)$ 이다.
$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} = 2 - (-5) = 7$

17. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$\therefore \ \dfrac{-3-1}{-2-1} = \dfrac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$

$\Rightarrow \ \therefore \ k = 4$

18. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠ ,
$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.
㉠과 ㉡은 서로 직교하므로
$pp'+qq'=0$이다.
(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의
전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은
$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$
$\therefore\ a=-2$
$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢
㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로
㉢의 판별식 $\mathrm{D}_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$
$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.
따라서 ㉣의 판별식 $\frac{\mathrm{D}_2}{4}$는 0이다.
$\frac{\mathrm{D}_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$
$\therefore\ b=-4$
$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

19. 세 직선 $x+y+2=0,\ x-y-4=0,\ 3x-ky-9=0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

① $-3 \le k \le 3,\ k < -6$　　② $k=2,\ k=\pm 3$

③ $-3 < k < 3,\ k > 6$　　④ $k \ne 2,\ k \ne \pm 3$

⑤ $-3 < k$ 또는 $k > 3$

해설

$$\begin{cases} x+y+2=0 & \cdots ㉠ \\ x-y-4=0 & \cdots ㉡ \\ 3x-ky-9=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고, 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하므로

㉠, ㉡ 의 교점은 $(1,\ 3)$ 이 ㉢위에 있지 않다.

$\therefore\ 3+3k-9 \ne 0 \quad \therefore\ k \ne 2$

㉠, ㉢ 은 평행하지 않으므로

$\dfrac{1}{3} \ne \dfrac{1}{-k} \ \rightarrow\ k \ne -3$

㉡, ㉢ 은 평행하지 않으므로,

$\dfrac{1}{3} \ne \dfrac{-1}{-k} \ \rightarrow\ k \ne 3$

$\therefore\ k \ne 2,\ k \ne \pm 3$

20. 두 점 A$(-2,\ -1)$, B$(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\dfrac{3-(-1)}{4-(-2)} = \dfrac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$을 지나고, 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\dfrac{3}{2}(x-1)$

즉, $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} = 1$

21. 두 직선 $ax+by+1=0$과 $a'x+b'y+2=0$의 교점을 지나는 직선이 원점을 통과하고 기울기가 -1일 때, $\dfrac{a'-b'}{a-b}$의 값을 구하면?(단, $a \neq b,\ 2b \neq b'$이다.)

① 2　　② $\sqrt{3}$　　③ 3　　④ $2\sqrt{5}$　　⑤ 5

해설

$ax+by+1+k(a'x+b'y+2)=0$이
원점을 지나므로 $1+2k=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $ax+by+1-\dfrac{1}{2}(a'x+b'y+2)=0$

$\rightarrow (2a-a')x+(2b-b')y=0$

$y=-\dfrac{2a-a'}{2b-b'}x$

$\therefore\ -\dfrac{2a-a'}{2b-b'}=-1$

따라서 $2a-a'=2b-b' \rightarrow 2(a-b)=a'-b'$

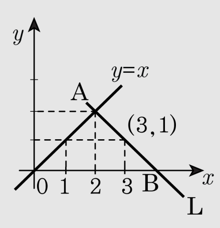
$\therefore\ \dfrac{a'-b'}{a-b}=2$

22. 두 직선 $y = x$, $y = 0$과 정점 A$(3,\ 1)$을 지나는 직선으로 둘러싸인 삼각형 면적의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

점 A 를 지나는 직선이 $y = x$ 와 수직일 때 $\triangle$OAB 의 면적은 최소이므로 $(2,\ 2)$ 인 점에서 교차한다.
따라서 직선 L은 $(2,\ 2)$와 $(3,\ 1)$을 지나는 직선이다.



$\therefore\ \mathrm{L} = y - x + 4$

$\therefore\ S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

23. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1 - y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x + 2 = 0,\ x^2 + x - 2 = 0,\ 1 - y = 0$

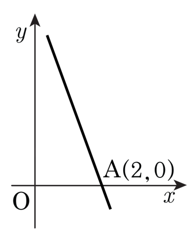
$\therefore x = -2,\ y = 1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a = -2,\ b = +1$

$\therefore\ a + b = -1$

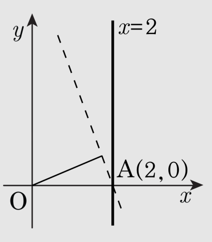
24. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?



① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{5}$ ⑤ 4

해설



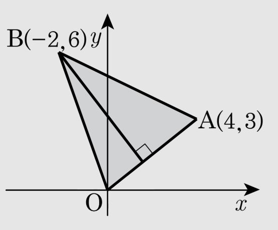
다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고
y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여
원점 O 와l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

25. 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 3)$, $B(-2,\ 6)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 넓이는?

① 9　　② 10　　③ 12　　④ 15　　⑤ 18

해설

$\overline{OA} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ 이고 직선 OA 의 방정식은 $y = \dfrac{3}{4}x$



즉 $3x - 4y = 0$ 이므로 점 $B(-2, 6)$ 과 직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{|3\times(-2)-4\times6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times5\times6 = 15$