1. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$ 의 해가 $-4 < x < 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, a 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

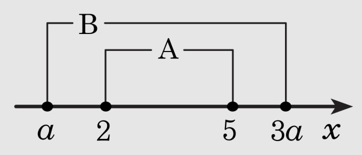
해가 $-4 < x < 2$ 이므로
$(x+4)(x-2) < 0$
$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$
$\therefore a = -8$

2. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \ge 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \le 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \le a \le 2$ ② $\frac{2}{3} \le a \le 2$ ③ $\frac{5}{3} \le a \le 2$
④ $\frac{5}{3} \le a \le 5$ ⑤ $2 \le a \le 5$

해설

$-x^2+7x-10 \ge 0$
$x^2-7x+10 \le 0$
$(x-2)(x-5) \le 0$
$2 \le x \le 5$
$x^2-4ax+3a^2 \le 0$
$(x-a)(x-3a) \le 0$
$a \le x \le 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \le 2,\ 3a \ge 5$이므로 $\frac{5}{3} \le a \le 2$

3. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$　　② $-1 < a < 3$　　③ $0 \le a \le 3$

④ $-1 < a < 4$　　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a = 0$일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로
$a^2 - 3a \le 0$

$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \neq 0)$

4. 이차부등식 $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

② $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$

③ $x \neq \frac{3}{2}$ 인 모든 실수

④ 해는 없다.

⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

$\Rightarrow\ 4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

$\Rightarrow\ (2x - 3)^2 \leq 0$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

5. x에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \ge bx^2 - 2bx - 3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a < b$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

② $a < b$일 때, $x \le -1,\ x \le 3$이다.

③ $a < 0$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

④ $b < 0$일 때, $x \le -1,\ x \ge 3$이다.

⑤ $a \ge b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \ge bx^2 - 2bx - 3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2 - 2(a-b)x - 3(a-b) \ge 0$(이차부등식이므로 $a \ne b$)

i) $a < b$이면 $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 3$

ii) $a > b$이면

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \ge 0$

$\therefore x \le -1,\ x \ge 3$

6. 부등식 $3x^2 \geq 2|x-1|+3$의 해가 $x \leq \alpha$ 또는 $x \geq \beta$일 때, $3\alpha+\beta$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

(i) $x<1$일 때,

$3x^2 \geq -2(x-1)+3,\ 3x^2+2x-5 \geq 0$

$(x-1)(3x+5) \geq 0 \ \therefore x \leq -\frac{5}{3}$ 또는 $x \geq 1$

그런데 $x<1$이므로 $x \leq -\frac{5}{3}$

(ii) $x \geq 1$일 때,

$3x^2 \geq 2(x-1)+3,\ 3x^2-2x-1 \geq 0$

$(x-1)(3x+1) \geq 0 \therefore x \leq -\frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 1$

그런데 $x \geq 1$이므로 $x \geq 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore x \leq -\frac{5}{3}$ 또는 $x \geq 1$

따라서 $\alpha=-\frac{5}{3},\ \beta=1$이므로 $3\alpha+\beta=-4$

7. 이차부등식 $[x]^2 + [x] - 12 \le 0$의 해가 $a \le x < b$일 때, $a+b$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$[x]^2 + [x] - 12 \le 0$에서

$([x]+4)([x]-3) \le 0$

$\therefore -4 \le [x] \le 3$

$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$\therefore -4 \le x < 4$

따라서 $a = -4,\ b = 4$이므로 $a+b = 0$이다

8. 부등식 $2[x]^2 - 9[x] + 9 < 0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수)

① $\frac{2}{3} < x < \frac{7}{2}$ ② $\frac{3}{2} < x \le 3$ ③ $2 \le x < 3$
④ $1 \le x < 3$ ⑤ $1 \le x \le 4$

해설

$[x] = t$ 로 놓으면 $2t^2 - 9t + 9 < 0$ 이므로
부등식을 풀면 $(2t-3)(t-3) < 0$
$\therefore \frac{3}{2} < t < 3$
따라서, $\frac{3}{2} < [x] < 3$ 에서 $[x] = 2$
$\therefore 2 \le x < 3$

9. 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2 - 2(k-4)x + 4}$가 실수가 되도록 하는 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k \le 2$
② $k \le -1$ 또는 $k \ge 2$
③ $2 \le k \le 6$
④ $k \le 2$ 또는 $k \ge 6$
⑤ $k \ge 6$

해설

근호가 실수가 되려면
근호 속의 수가 양수이어야 한다.
즉, $x^2 - 2(k-4)x + 4 \ge 0$ 을 항상 만족시키면 되므로
판별식 $\frac{D}{4} \le 0$이 될 조건을 구하면 된다.
$\frac{D}{4} = (k-4)^2 - 4 \le 0$
$k^2 - 8k + 12 \le 0$, $(k-2)(k-6) \le 0$
$\therefore\ 2 \le k \le 6$

10. 이차부등식 $(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \ge 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \le 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \le 0$

$\therefore\ k(k-4) \ge 0,\quad k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

$\therefore\ \ k \ge 4(\because k>1)\quad \therefore$ 최솟값 : 4

11. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4 = a^2-2a-3 = (a+1)(a-3) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

a의 최솟값은 -1

12. 모든 실수 x에 대해 이차부등식 $x^2-x(kx-3)+3>0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2+3x+3>0$

$D=3^2-4\times(1-k)\times3<0$

$\therefore k<\dfrac{3}{12}=0.25$

최대 정수 $k=0$

13. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2mx - m \geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a \leq m \leq b$이다. $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$x^2 - 2mx - m \geq 0$이
항상 성립하려면 판별시 $D \leq 0$

$\frac{D}{4} = m^2 + m \leq 0$

$m(m + 1) \leq 0$, $-1 \leq m \leq 0$

$\therefore\ a + b = (-1) + 0 = -1$

14. x에 관한 이차부등식 $x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 상수 a의 범위를 구하면 $p < a < q$이다. 이 때, pq의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $pq = 12$

해설

$x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D < 0$을 만족해야 한다.
$D = a^2 - 4(2a - 3) < 0$
$a^2 - 8a + 12 < 0$
$(a - 6)(a - 2) < 0$
$2 < a < 6 \quad \therefore p = 2, q = 6$
$\therefore \ pq = 2 \times 6 = 12$

15. 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-3<x<2$일 때, $bx^2-ax+c<0$의 해를 구하면 $x<\alpha,\ x>\beta$이다. $2\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$-3<x<2 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)<0$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0$

$\therefore\ -x^2-x+6>0 \cdots\cdots$ ①

①의 좌변과 ax^2+bx+c의 각 항의 계수의 비가 일정해야 하므로 같게 놓아도 무방하다.

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=6$

이것을 $bx^2-ax+c<0$에 대입하면

$-x^2+x+6<0$

$\therefore\ x^2-x-6>0 \quad (x+2)(x-3)>0$

$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>3$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=3 \quad \therefore\ 2\alpha+\beta=-1$

16. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0$ ······㉠
해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면
$x^2-5x+6<0$ ······㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2+5x-6>0$ ······㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

17. x 에 대한 이차부등식 $x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 이려면
$(x - 1)(x - 4) > 0$ 에서 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 이므로
$a = -5$, $b = 4$ 따라서 $a + b = -1$

18. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을
α, β라 하면, $\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha$, $2x+1=\beta$이므로
$x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$
따라서, $\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}$
$=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$\therefore$ $f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$
$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$

19. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$
$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

20. a가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2+ax+a=0$, $x^2-2ax+2a+3=0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a의 범위는?

① $-1<a<4$

② $-1<a<0$ 또는 $3<a<4$

③ $-1\le a\le 4$

④ $-1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

⑤ $3\le x\le 4$

해설

$x^2+ax+a=0 \quad \cdots ㉠$

$x^2-2ax+2a+3=0 \cdots ㉡$

㉠에서 허근을 가지려면

$D=a^2-4a<0$

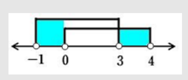
$\therefore\ 0<a<4$

㉡에서 허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

$\therefore\ -1<a<3$

한쪽만이 허근을 가지려면, 

$\therefore\ -1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

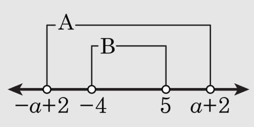
21. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x + 1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x - 2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \le 3$ ② $0 < a < 3$ ③ $0 \le a \le 3$

④ $a \ge 3$ ⑤ $a \ge 6$

해설

$\therefore\ a \ge 6$



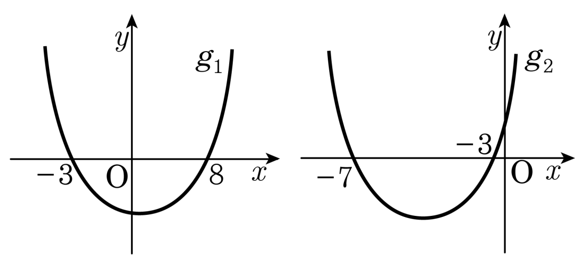
22. 어부 김씨는 둘레 길이가 $28\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형 모양의 양식장의 넓이를 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이 도도록 지으려고 한다. 이 때 양식장의 한 변의 길이를 최대 얼마로 해야 하는가?

① $5\,\mathrm{m}$　② $6\,\mathrm{m}$　③ $7\,\mathrm{m}$　④ $8\,\mathrm{m}$　⑤ $9\,\mathrm{m}$

해설

양식장의 가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라고 하면
둘레의 길이는 $28\,\mathrm{m}$ 이므로
세로의 길이는 $(14-x)\,\mathrm{m}$ 이다.
양식장의 넓이가 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(14-x) \ge 48,\ 14x - x^2 - 48 \ge 0$
$x^2 - 14x + 48 \le 0, (x-6)(x-8) \le 0$
$\therefore 6 \le x \le 8$
따라서 한 변의 길이를 최대 $8\,\mathrm{m}$ 로 해야 한다.

23. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x+12)(x-2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

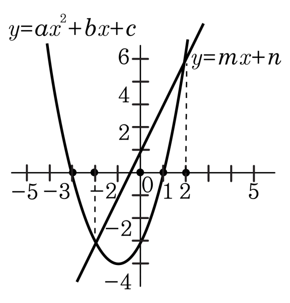
24. 이차함수 $y = x^2 - 2x$ 의 그래프가 직선 $y = a$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < b$ 일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2 - 2x < a$ 에서 $x^2 - 2x - a < 0 \cdots$ ㉠
한편, 해가 $-1 < x < b$ 이고
이차항의 계수가 1 인 이차부등식은
$(x+1)(x-b) < 0$
$\therefore x^2 + (1-b)x - b < 0$ 이
부등식 ㉠과 일치해야 하므로
$1 - b = -2$, $a = b$
따라서 $a = 3$, $b = 3$ 이므로 $ab = 9$

25. 일차함수 $y = mx + n$ 과 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



연립이차부등식
$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$ 에서 위의 식의 근은 $-3 < x < 1$,

아래 식의 근은 $-2 < x < 2$ 이다.

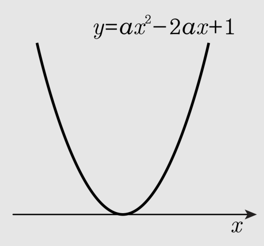
따라서 공통범위는 $-2 < x < 1$ 이다. $-2 \times 1 = -2$

26. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \le 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

27. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 1$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - a$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있도록 하는 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a > 0$　② $-\frac{1}{4} < a < 0$　③ $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$
④ $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$　⑤ $-\frac{3}{4} < a < 0$

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - 4ax + 1 \\ y = 2x - a \end{cases}$$

근이 존재하지 않아야 하므로

$2x - a = x^2 - 4ax + 1$

$x^2 + (-4a - 2)x + (a + 1) = 0$

$D < 0 :\ (2a + 1)^2 - (a + 1) < 0$

$4a^2 + 3a = a(4a + 3) < 0$

$\therefore\ -\frac{3}{4} < a < 0$

28. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
$2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠ 이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0 \cdots$ ㉡ 식이
항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

29. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \leq 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$ ② $2 < a < 5$ ③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$ ⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \leq 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2 + ax + a + 3 = 0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore D &= a^2 - 4(a+3)\\ &= a^2 - 4a - 12\\ &= (a-6)(a+2) = 0\end{aligned}$$

$\therefore a = 6\ (\because a > 0)$

30. 부등식 $a(x^2-2x+1)>2(x^2-2x-2)$를 만족하는 실수 x가 존재할 때, 상수 a의 범위는?

① $a>2$ ② $a \geq 2$ ③ $a<2$
④ a는 모든 실수 ⑤ $a<\pm 2$

해설

$a=2$일 때, $6>0$이므로 x는 모든 실수
$a \neq 2$일 때,
$(a-2)x^2-2(a-2)x+a+4=0 \cdots$ ㉠에서
$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(a+4)=-6(a-2)$이므로
i) $a>2$이면, x는 모든 실수
ii) $a<2$이면, $\frac{D}{4}>0$이므로 ㉠의 근을
$\alpha, \beta (\alpha<\beta)$라 하면
부등식의 해는 $\alpha<x<\beta$이므로 x값이 존재한다.
$\therefore$ a는 모든 실수

31. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$ ② $-1 \le x \le 1$ ③ $x \ge 1$
④ 해는 없다. ⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로
$|x^2+x+1|=x^2+x+1$
$x^2+x+1 \le |x+2|$에서
(i) $x<-2$일 때,
$x^2+x+1 \le -(x+2),\ x^2+2x+3 \le 0$
$(x+1)^2+2 \le 0$
그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.
(ii) $x \ge -2$일 때,
$x^2+x+1 \le x+2,\ x^2 \le 1$
$\therefore -1 \le x \le 1$
(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

32. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 a, b의 조건으로 바른 것은?

① $a \neq 20,\ b < 25$

② $a = 20,\ 0 < b < 25$

③ $a = 20,\ b > 25$

④ $0 < a < 20,\ b > 25$

⑤ $0 < a \leq 20,\ 0 \leq b \leq 25$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한다

$\Rightarrow \quad x^2 + 2(2y + 5) + 4y^2 + ay + b > 0$

항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다

$D' = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$

$\Rightarrow \quad (20 - a)y + 25 - b < 0$

임의의 x, y에 대해 성립하려면, $a = 20, \quad b > 25$

33. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $|x-2|<\sqrt{3}$의 해와 같을 때, 이차부등식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$ 의 해를 구하면?

① $0<x<1$　　② $1<x<2$　　③ $2<x<3$

④ $3<x<4$　　⑤ $4<x<5$

해설

$|x-2|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x-2<\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0(\because a<0)$

$-\frac{b}{a}=4, \frac{c}{a}=1 \Rightarrow b=-4a, c=a$

그러면 주어진 식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$에서

$ax^2+(-4a+a)x+a-4a+5a>0$

$ax^2-3ax+2a>0\ (\because a<0)$

$x^2-3x+2<0$

$(x-2)(x-1)<0$

따라서 $1<x<2$

34. 이차방정식 $2x^2 + 2kx + k + 2 = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차부등식 $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$가 절대부등식이 되기 위한 실수 k값의 범위를 구하면?

① $1 - \sqrt{5} < k < 1 + \sqrt{5}$

② $1 - \sqrt{5} \leq k \leq 1 + \sqrt{5}$

③ $-2 < k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k < 6$

④ $-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

⑤ $-2 < k \leq 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} \leq k < 6$

해설

i) 서로 다른 두 실근을 가지려면,
$D' = k^2 - (2k + 4) > 0$이므로
$k^2 - 2k - 4 > 0$
$k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $k > 1 + \sqrt{5}$ $\cdots$ ①
ii) $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$이 절대부등식이 되려면
$D = k^2 - 4(k + 3) \leq 0$이므로 $(k + 2)(k - 6) \leq 0$
$-2 \leq k \leq 6$ $\cdots$ ②
①, ② 의 공통범위는
$-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

35. 어떤 상점에서 스캐너를 한 개에 10만원씩 판매할 때 한 달에 100개가 팔리고, 한 개의 가격을 x만원 인상하면 월 판매량이 $4x$개 줄어드는 것으로 조사되었다. 한 달의 총 판매액이 1200만원 이상이 되도록 하려면 한 개의 가격을 얼마로 하면 좋을까?

① 15만원 이상 20만원 이하 ② 10만원 이상 15만원 이하

③ 5만원 이상 10만원 이하 ④ 4만원 이상 8만원 이하

⑤ 2만원 이상 4만원 이하

해설

$(10+x)(100-4x) \geq 1200,\ 4x^2-60x+200 \leq 0$

$x^2-15x+50=(x-5)(x-10) \leq 0$

$\therefore 5 \leq x \leq 10$

10만원씩 판매할 때보다 5만 원 이상 10만 원 이하 인상해야 하므로 한 개의 가격을 15만 원 이상 20만 원 이하가 되도록 하면 된다.