

1. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} (개)이다.

$$2^{n-3} = 32, \quad 2^{n-3} = 2^5$$

$$n - 3 = 5 \text{ 이므로 } n = 8 \text{ 이다.}$$

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = \{x \mid x \text{는 } 5\text{이하의 자연수}\}$, $A = \{2, 3, 5\}$ 일 때, 다음 중 집합 B 가 반드시 포함해야 하는 원소는?

① 1, 4

② 1, 3, 5

③ 2, 3, 5

④ 2, 3, 4, 5

⑤ 1, 2, 3, 4, 5

해설

집합 $A = \{2, 3, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로 집합 B 는 원소 1, 4를 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.

3. 세 집합 A, B, X 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $X \subset (A \cup B)$

② $(A \cap B) \subset X$

③ $(A \cup B) \subset X$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

해설

$(A \cup B) \cap X = X$ 이면 $X \subset (A \cup B)$ 이다.

② $(A \cap B) \subset X$ 라고 말할 수 없다.

④ $A \cap B = \emptyset$ 라고 말할 수 없다.

4. 두 집합 A, B 에 대하여 연산 $\Delta, \square$ 을 $A\Delta B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$,
 $A\square B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 로 정의한다. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1\}$
일 때, $n((A\Delta B) - (A\square B))$ 는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

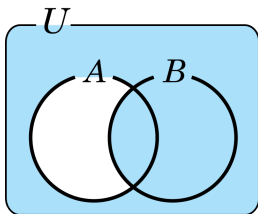
⑤ 5

해설

연산 $\Delta, \square$ 에 대하여 원소를 각각 구하면 다음과 같다. $A\Delta B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A\square B = \{-1, 0, 1\}$

그러므로 $(A\Delta B) - (A\square B) = \{-2, 2\} \therefore n((A\Delta B) - (A\square B)) = 2$

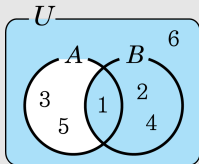
5. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$,
 $B = \{x | x \text{는 } 4 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에서 색칠된 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{1, 2, 4\}$ ② $\{1, 2, 6\}$ ③ $\{1, 3, 6\}$
 ④ $\{1, 2, 4, 6\}$ ⑤ $\{1, 2, 5, 6\}$

해설

$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 4\}$ 이므로



색칠한 부분은 $\{1, 2, 4, 6\}$ 이다.

6. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 두 집합을 각각 P, Q 라 하자. $P = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$, $Q = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 일 때, $p \rightarrow \sim q$ 가 거짓임을 보이는 원소는?

① 1

② 2

③ 3

④ 6

⑤ 7

해설

$p \rightarrow \sim q$ 의 반례는 $P \not\subset Q^c$ 을 만족하는 원소이다.

즉, P 의 원소이면서 Q^c 의 원소가 아닌 것이므로 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$

$\therefore P \cap Q = \{6\}$

7. 명제 ' $x^2 + 2x + a \neq 0$ 이면 $x + 1 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 3

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

대우인 ' $x + 1 = 0$ 이면 $x^2 + 2x + a = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

8. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 명제 중 반드시 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $\sim q \rightarrow \sim p$

㉡ $r \rightarrow \sim p$

㉢ $r \rightarrow p$

㉤ $p \rightarrow r$

㉦ $\sim q \rightarrow p$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉤ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉤

해설

$p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$, $q \rightarrow \sim r$ 이 참
 $p \rightarrow q \rightarrow \sim r$ 이므로 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이고 그 대우인 $r \rightarrow \sim p$ 가 참

9. x, y 가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$ 가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$

⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore |xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

10. 두 조건 $p: |x-1| \leq k$, $q: |x+2| \leq 10$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이다. 상수 k 의 최댓값은? (단, $k \geq 0$ 이다.)

① 6

② 7

③ 8

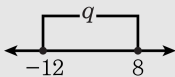
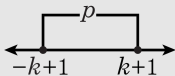
④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} p: |x-1| \leq k &\Rightarrow -k \leq x-1 \leq k \\ &\Rightarrow -k+1 \leq x \leq k+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q: |x+2| \leq 10 &\Rightarrow -10 \leq x+2 \leq 10 \\ &\Rightarrow -12 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$



$p \subset q$ 이므로 $-k+1 \geq -12, k+1 \leq 8$
 $\therefore k$ 의 최댓값: 7

11. $\{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B = A$ 가 성립하기 위한 필요충분조건으로 알맞은 것은?

- ① $A \cap B^c = \emptyset$ ② $B \cap A^c = \emptyset$ ③ $A = B$
④ $A \cap B = \emptyset$ ⑤ $A \cup B = A$

해설

$$\begin{aligned} & \{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B \\ &= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B \\ &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B \\ &= A \cap B = A \end{aligned}$$

$\therefore A \subset B$ 이므로 $A \cap B^c = \emptyset$ 이면 $A \subset B$ 이므로 필요충분조건은 ①이다.

12. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) $1 \in A$

(나) $a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 집합 A 는 유한집합이다.

㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^3 \in A, \dots,$

즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의 원소이므로 A 는 무한집합이다.

㉡ ㉠에서 $(\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^4 \in A, (\sqrt{2})^6 \in A, \dots,$

즉 $2 \in A, 2^2 \in A, 2^3 \in A, \dots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ (반례)

집합 $A = \{0, 1, \sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, \dots\}$ 은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

13. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

보기

$$\{1\} \subset B \subset A, n(B) = 3$$



답 :

개



정답 : 3 개

해설

$$A = \{1, 3, 9, 27\}$$

집합 B 는 원소 1을 포함한 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 집합이므로

$\{1, 3, 9\}$, $\{1, 3, 27\}$, $\{1, 9, 27\}$ 의 3개이다.

14. $\{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중에서 a 또는 d 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하면?

① 4 개

② 8 개

③ 10 개

④ 12 개

⑤ 24 개

해설

(i) a 를 포함하는 경우

$$2^{5-1} = 2^4 = 16 \text{ (개)}$$

(ii) d 를 포함하는 경우

$$2^{5-1} = 16 \text{ (개)}$$

(i) a 와 d 를 모두 포함하는 경우

$$2^{5-2} = 8 \text{ (개)}$$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$16 + 16 - 8 = 24 \text{ (개)이다.}$$

15. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 15\}$, $B = \{1, 3, 9\}$ 이므로

$A \cap B = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 9, 15\}$

$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$

$\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

X 는 원소 1, 3 을 포함하는

$\{1, 3, 5, 9, 15\}$ 의 부분집합이므로

(집합 X 의 갯수) $= 2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

- ㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) < n(A)$ 이다.
㉡ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
㉢ $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.
㉣ U^c 은 모든 집합의 부분집합이다.
㉤ $A - B = B - A$ 이면 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉡

▶ 정답 : ㉣

▶ 정답 : ㉤

해설

- ㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) \leq n(A)$ 이다.
㉢ $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.
㉣ $U^c = \emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
㉤ $A - B = B - A$ 이면 $A = B$ 이므로 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

17. 전체 집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$ 일 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $A \cap B = \{7\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1, 3, 7, 11\}$

㉢ $A^c \cap B = \{13\}$

㉣ $A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$

㉤ $A^c \cap B^c = \{5, 9, 15\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\},$$

$$A = \{1, 3, 7, 11\}, B = \{7, 13\}$$

$$\text{㉡ } A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 11\}$$

$$\text{㉢ } A^c \cap B = B - A = \{13\}$$

$$\text{㉣ } A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$$

$$\text{㉤ } A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 9, 15\}$$

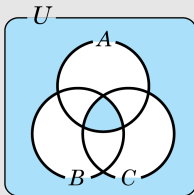
18. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 30\text{이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x|x\text{는 } 30\text{이하의 } 6\text{의 배수}\}$,
 $B = \{x|x\text{는 } 30\text{이하의 } 9\text{의 배수}\}$,
 $C = \{9, 12, 18, 20, 25\}$ 에 대하여 $A\Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
 $n((A\Delta B) \cap (A\Delta C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$(A\Delta B) \cap (A\Delta C)$ 를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$n(A \cap B \cap C) = 1, n((A \cup B \cup C)^c) = 21$$

$$\therefore n((A\Delta B) \cap (A\Delta C)) = 1 + 21 = 22$$

19. 두 집합 $A = \{3, 6, a + 2, 10\}$, $B = \{2 \times a, 3, b, 5\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

집합 A 에 원소 5 가 속해야 하므로 $a + 2 = 5$ 이다. $\therefore a = 3$
 $A = \{3, 6, 5, 10\}$, $B = \{6, 3, b, 5\}$ 에서
원소 10 이 집합 B 에 있어야 하므로 $b = 10$ 이다.
따라서 $a + b = 3 + 10 = 13$ 이다.