

1. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 64개

해설

$a \rightarrow$, $b \rightarrow$, $c \rightarrow$

Y 의 원소 p, q, r, s 에서 세 개를 뽑아 위 안에
넣어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.

이 때 세 개의 수는 모두 같거나,

두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.

따라서 a 에는 p, q, r, s 의 4가지,

b 에는 a 에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,

마찬가지로 c 에는 a, b 에 온 수가

와도 좋으므로 4가지씩이 있다.

$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64(\text{개})$

2. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

3. 함수 $f(x) = mx + n$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$, $(f \circ f)(2) = 7$ 이 성립할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1}(3) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = 3, (f \circ f)(2) = 7$ 에서 $f(f(2)) = f(3) = 7$

$2m + n = 3 \cdots \textcircled{㉠}$

$3m + n = 7 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $m = 4, n = -5$

$\therefore m + n = -1$

4. 다음 식을 간단히 하면?

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

- ① 1 ② x ③ $\frac{1}{x}$ ④ $\frac{1}{1-x}$ ⑤ $-x$

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} \\ &= 1 - \frac{x-1}{x-1-x} \\ &= 1 + x - 1 = x \end{aligned}$$

5. 함수 $y = \frac{bx+2}{ax-1}$ 의 정의역은 $x \neq 1$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$ 인 모든 실수이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

정의역은 $x \neq 1$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$ 인 모든 실수이므로,
 $a = 1$, $b = 2$ 이다.
 $\therefore a + b = 1 + 2 = 3$

6. $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x = a$, $y = b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 2$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+1}{2x-1} \\ &= \frac{3\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad a + b = 2$$

7. 유리함수 $f(x) = \frac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ -1 ⑤ -2

해설

역함수의 식은 $x = \frac{ay}{3y+2}$

$$3xy + 2x = ay$$

$$\therefore y = \frac{-2x}{3x-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-2x}{3x-a}$$

모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = f^{-1}(x) \text{ 이므로}$$

$$\frac{ax}{3x+2} = \frac{-2x}{3x-a}$$

$$\therefore a = -2$$

8. $1 < a < 4$ 일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a-4)^2} + |a-1| \\ &= |a-4| + |a-1| \\ &= -a+4+a-1 = 3 \end{aligned}$$

9. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$
$$\therefore f(25) = 26$$

10. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.

X

Y

1

2

3

a

b

→

X

Y

1

2

3

a

b

→

X

Y

1

2

3

a

b

→

X

Y

1

2

3

a

b

→

11. 함수 $f(x) = x^2 + 2x + 3 (x \geq -1)$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \sqrt{x+a} - b$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$y = x^2 + 2x + 3$$

$$\Rightarrow y - 2 = (x + 1)^2$$

$$\Rightarrow (y + 1)^2 = x - 2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x - 2} - 1 \cdots f^{-1}(x)$$

$$\therefore a + b = -1$$

12. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 5$, $f(f(x)) = x$ 일 때 $f(3)$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(f(x)) = x$ 이므로 $f(x) = f^{-1}(x)$
 $\therefore f(3) = f^{-1}(3) = 5$

13. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b+1=3$

$\therefore b=1$

이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

$1 + f^{-1}(a) = 0, f^{-1}(a) = -1$

$\therefore f(-1) = a$

$\therefore a = 1 - (-1)^2 = 0$

14. 유리식 $\frac{2b+c}{3a} = \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c}$ 의 값을 k_1, k_2 라 할 때, $k_1 + k_2$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\frac{2b+c}{3a} = \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c} = k \text{라 하면}$$

(i) $3a+2b+c \neq 0$ 일 때,

$$k = \frac{6a+4b+2c}{3a+2b+c} = 2$$

(ii) $3a+2b+c = 0$ 일 때,

$$k = \frac{3a+2b}{c} = \frac{-c}{c} = -1$$

$$\therefore \{k_1, k_2\} = \{2, -1\}$$

$$\therefore k_1 + k_2 = 1$$

15. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

16. $\sqrt{22-8\sqrt{6}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① $16-\sqrt{6}$

② $16-2\sqrt{6}$

③ $16-4\sqrt{6}$

④ $16-6\sqrt{6}$

⑤ $15-8\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{22-8\sqrt{6}} &= \sqrt{22-2\sqrt{16\times 6}} \\ &= 4-\sqrt{6} = 1.\times\times\times\end{aligned}$$

정수 부분 $a=1$, 소수 부분 $4-\sqrt{6}-1=3-\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= 1+(3-\sqrt{6})^2 \\ &= 1+9+6-6\sqrt{6}=16-6\sqrt{6}\end{aligned}$$

17. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$ 에서

$x \geq 0, 8-x \geq 0$ 이므로

정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$, $f(x) \geq 0$ 이므로

$\{f(x)\}^2$ 이 최대일 때 $f(x)$ 도 최대이고

$\{f(x)\}^2 = x + 2\sqrt{8x-x^2} + 8 - x = 8 + 2\sqrt{8x-x^2}$

이때, $y = 8x - x^2 = -(x-4)^2 + 16$ 이므로

$0 \leq x \leq 8$ 에서 $x = 4$ 일 때 최댓값 16을 가진다.

따라서 $x = 4$ 일 때 $\{f(x)\}^2$ 은

최댓값 16을 가지므로

$f(x)$ 의 최댓값은 4이다.

18. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 5, g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
 $\therefore f(1) = 2$
 $f(1) = a + b = 2, f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3, b = -1$
 $\therefore f(x) = 3x - 1$
 $\therefore f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

19. 두 함수 $y = |x + 1| - |x - 2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m 의 값을 정할 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x + 1| - |x - 2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) - (-x + 2) = -3$$

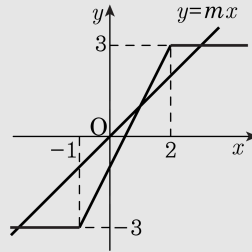
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (-x + 2) = 2x - 1$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (x - 2) = 3$$

i) ii) iii)에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$ 따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④번이다.



20. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 는 $(x-3)(y-3)(z-3)=0$ 과 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ 을 모두 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

- ① 3 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(x-3)(y-3)(z-3)=0$ 을 전개하면
 $xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=0\cdots\textcircled{1}$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{3}$
 $\therefore 3(xy+yz+zx)=xyz\cdots\textcircled{2}$
②를 ①에 대입하면 $9(x+y+z)=27$
 $\therefore x+y+z=3$

21. $x = \frac{2a}{1+a^2}$ ($a > 1$) 일 때, $P = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ 의 값을 구하면?

- ① a ② $a+1$ ③ $a-1$ ④ a^2 ⑤ $\frac{1}{a}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= \sqrt{1 + \frac{2a}{1+a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+2a+a^2}{1+a^2}} = \frac{\sqrt{(a+1)^2}}{\sqrt{1+a^2}} \\ &= \frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} \\ (\because \text{조건에서 } a > 1) \\ \text{또, } \sqrt{1-x} &= \frac{|a-1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}} \\ \therefore P &= \frac{\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}{\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}} \\ &= \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

22. 두 함수 f, g 가 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ 일 때, $0 \leq x \leq 4$ 에서
함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

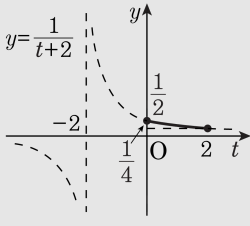
- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ 1
- ⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x} + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 1 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 2}\end{aligned}$$

$\sqrt{x} = t$ 로 놓으면
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $0 \leq t \leq 2$ 이므로
주어진 함수는 $y = \frac{1}{t+2} (0 \leq t \leq 2)$

따라서 다음 그림에서 $t = 0$ 일 때
최댓값은 $\frac{1}{2}$,
 $t = 2$ 일 때
최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이므로
구하는 합은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



23. 분수식 $\frac{3x}{x+2} + \frac{2x}{x-2} + \frac{5x^2-2x}{x^2+4}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{x^2+5}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

② $\frac{5x^2-4}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

③ $\frac{2x^3(5x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

④ $\frac{2x^2(5x^2+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

⑤ $\frac{4x^2(5x^2-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2+4x+3x^2-6x}{x^2-4} + \frac{5x^2-2x}{x^2+4} \\ &= \frac{5x^2-2x}{x^2-4} + \frac{5x^2-2x}{x^2+4} \\ &= \frac{(5x^2-2x)(x^2+4+x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)} \\ &= \frac{2x^3(5x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} \end{aligned}$$

24. $x = \sqrt{4 - \sqrt{12}}$ 일 때, $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4 - \sqrt{12}} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{3} - 1, x + 1 = \sqrt{3}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

준식을 $x^2 + 2x - 2$ 로 나누면

$$(\text{준식}) = (x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x + 3) - 2$$

$$\therefore \text{준식의 값은 } -2 \quad (\because x^2 + 2x - 2 = 0)$$

