1. 두 집합 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{p,q,r,s\}$가 있다. X에서 Y로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 64 개

해설

$a \to \boxed{}$, $b \to \boxed{}$, $c \to \boxed{}$

Y의 원소 p,q,r,s에서 세 개를 뽑아 위 $\boxed{}$안에 늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.
이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.
따라서 a에는 p,q,r,s의 4가지,
b에는 a에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c에는 a,b에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.
$\therefore 4\times4\times4=4^3=64$(개)

2. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

3. 함수 $f(x) = mx + n$에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$, $(f \circ f)(2) = 7$이 성립할 때, 상수 m, n의 합 $m + n$의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1}(3) = 2$이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = 3, (f \circ f)(2) = 7$에서 $f(f(2)) = f(3) = 7$

$2m + n = 3 \cdots$ ㉠

$3m + n = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m = 4, n = -5$

$\therefore m + n = -1$

4. 다음 식을 간단히 하면?

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}$$

① 1　　② x　　③ $\dfrac{1}{x}$　　④ $\dfrac{1}{1-x}$　　⑤ $-x$

해설

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}$$

$$=1-\frac{x-1}{x-1-x}$$

$$=1+x-1=x$$

5. 함수 $y = \dfrac{bx+2}{ax-1}$의 정의역은 $x \neq 1$인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$인 모든 실수이다. 이때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

정의역은 $x \neq 1$인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$인 모든 실수이므로,

$a = 1,\ b = 2$이다.

$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$

6. $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x = a,\ y = b$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 2$

해설

$$y = \frac{3x+1}{2x-1}$$

$$= \frac{3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$

$\therefore\ a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}\quad a + b = 2$

7. 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ -1 ⑤ -2

해설

역함수의 식은 $x=\dfrac{ay}{3y+2}$

$3xy+2x=ay$

$\therefore y=\dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-2x}{3x-a}$

모든 실수 x 에 대하여

$f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로

$\dfrac{ax}{3x+2}=\dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore a=-2$

8. $1 < a < 4$일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$
$= |a-4| + |a-1|$
$= -a + 4 + a - 1 \quad = 3$

9. 1보다 큰 자연수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$로 정의 할 때, $f(25)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=x+1$$

$\therefore f(25)=26$

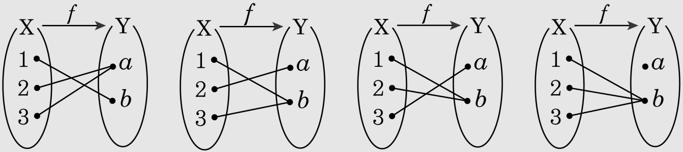
10. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1)=b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ＿＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 4 개

해설

$f(1)=b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



11. 함수 $f(x) = x^2 + 2x + 3(x \geq -1)$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \sqrt{x+a} - b$ 일 때, 상수 a , b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 + 2x + 3$

$\Rightarrow y - 2 = (x+1)^2$

$\Rightarrow (y+1)^2 = x - 2$

$\Rightarrow y = \sqrt{x-2} - 1 \cdots f^{-1}(x)$

$\therefore a + b = -1$

12. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3)=5$, $f(f(x))=x$ 일 때 $f(3)$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(f(x))=x$ 이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$

$\therefore f(3)=f^{-1}(3)=5$

13. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b + 1 = 3$

$\therefore\ b = 1$

이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

$1 + f^{-1}(a) = 0,\ f^{-1}(a) = -1$

$\therefore\ f(-1) = a$

$\therefore\ a = 1 - (-1)^2 = 0$

14. 유리식 $\dfrac{2b+c}{3a} = \dfrac{c+3a}{2b} = \dfrac{3a+2b}{c}$ 의 값을 k_1, k_2 라 할 때, k_1+k_2 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\dfrac{2b+c}{3a} = \dfrac{c+3a}{2b} = \dfrac{3a+2b}{c} = k$ 라 하면

(i) $3a+2b+c \neq 0$ 일 때,

$$k = \frac{6a+4b+2c}{3a+2b+c} = 2$$

(ii) $3a+2b+c = 0$ 일 때,

$$k = \frac{3a+2b}{c} = \frac{-c}{c} = -1$$

$\therefore \{k_1,\ k_2\} = \{2,\ -1\}$

$\therefore k_1 + k_2 = 1$

15. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$일 때, $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\\ &\quad (\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})\\ &= \sqrt{100}-1=10-1=9\end{aligned}$$

16. $\sqrt{22-8\sqrt{6}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하면?

① $16-\sqrt{6}$ ② $16-2\sqrt{6}$ ③ $16-4\sqrt{6}$

④ $16-6\sqrt{6}$ ⑤ $15-8\sqrt{6}$

해설

$$\sqrt{22-8\sqrt{6}} = \sqrt{22-2\sqrt{16\times 6}}$$
$$= 4-\sqrt{6} = 1.\times\times\times$$

정수 부분 $a=1$, 소수 부분 $4-\sqrt{6}-1=3-\sqrt{6}$

$$a^2+b^2 = 1+(3-\sqrt{6})^2$$
$$= 1+9+6-6\sqrt{6} = 16-6\sqrt{6}$$

17. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$에서
$x \geq 0,\ 8-x \geq 0$이므로
정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$, $f(x) \geq 0$이므로
$\{f(x)\}^2$이 최대일 때 $f(x)$도 최대이고
$\{f(x)\}^2 = x + 2\sqrt{8x-x^2} + 8 - x = 8 + 2\sqrt{8x-x^2}$
이때, $y = 8x - x^2 = -(x-4)^2 + 16$이므로
$0 \leq x \leq 8$에서 $x = 4$일 때 최댓값 16을 가진다.
따라서 $x = 4$일 때 $\{f(x)\}^2$은
최댓값 16을 가지므로
$f(x)$의 최댓값은 4이다.

18. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 $f,\ g$ 가 $f(2) = 5,\ g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
$y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
$\therefore\ f(1) = 2$
$f(1) = a + b = 2,\ f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3,\ b = -1$
$\therefore\ f(x) = 3x - 1$
$\therefore\ f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

19. 두 함수 $y=|x+1|-|x-2|$, $y=mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m의 값을 정할 때, 다음 중 m의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y=|x+1|-|x-2|$ 에서

i) $x<-1$ 일 때

$y=-(x+1)-(-x+2)=-3$

ii) $-1\le x<2$ 일 때

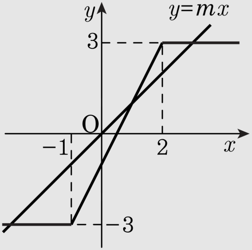
$y=(x+1)-(-x+2)=2x-1$

iii) $x\ge 2$ 일 때

$y=(x+1)-(x-2)=3$

i) ii) iii) 에서 $y=mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0<m<\frac{3}{2}$

따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④ 번이다.



20. 0이 아닌 세 실수 x, y, z는 $(x-3)(y-3)(z-3)=0$과 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$을 모두 만족할 때, $x+y+z$의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(x-3)(y-3)(z-3)=0$을 전개하면

$xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=0 \cdots ①$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{3}$

$\therefore 3(xy+yz+zx)=xyz \cdots ②$

②를 ①에 대입하면 $9(x+y+z)=27$

$\therefore x+y+z=3$

21. $x=\dfrac{2a}{1+a^2}$ $(a>1)$ 일 때, $P=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ 의 값을 구하면?

① a ② $a+1$ ③ $a-1$ ④ a^2 ⑤ $\dfrac{1}{a}$

해설

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{1+\frac{2a}{1+a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+2a+a^2}{1+a^2}}=\frac{\sqrt{(a+1)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$=\frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$(\because$ 조건에서 $a>1)$

또, $\sqrt{1-x}=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\therefore\ P=\frac{\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}-\dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}{\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}$$

$$=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}$$

22. 두 함수 f, g 가 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x}+1$ 일 때, $0 \le x \le 4$ 에서 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}+1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$\sqrt{x} = t$ 로 놓으면

$0 \le x \le 4$ 에서 $0 \le t \le 2$ 이므로

주어진 함수는 $y = \dfrac{1}{t+2}(0 \le t \le 2)$

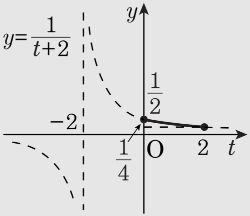
따라서 다음 그림에서 $t=0$ 일 때

최댓값은 $\dfrac{1}{2}$,

$t=2$ 일 때

최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이므로

구하는 합은 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$



23. 분수식 $\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{5x^2-2x}{x^2+4}$를 간단히 하면?

① $\dfrac{x^2+5}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

② $\dfrac{5x^2-4}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

③ $\dfrac{2x^3(5x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

④ $\dfrac{2x^2(5x^2+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

⑤ $\dfrac{4x^2(5x^2-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$

해설

$$\frac{2x^2+4x+3x^2-6x}{x^2-4}+\frac{5x^2-2x}{x^2+4}$$
$$=\frac{5x^2-2x}{x^2-4}+\frac{5x^2-2x}{x^2+4}$$
$$=\frac{(5x^2-2x)(x^2+4+x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$$
$$=\frac{2x^3(5x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

24. $x = \sqrt{4 - \sqrt{12}}$ 일 때, $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4 - \sqrt{12}} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$x = \sqrt{3} - 1$, $x + 1 = \sqrt{3}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2x - 2 = 0$

준식을 $x^2 + 2x - 2$ 로 나누면

(준식)$=(x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x + 3) - 2$

$\therefore$ 준식의 값은 -2 ($\because$ $x^2 + 2x - 2 = 0$)

25. 세 집합 $A=\{(x,y)\mid y=m(x+1)-1, m\text{은 실수}\}$ $B=\{(x,\ y)\mid y=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|,\ x\neq 1\text{인실수}\}$

$C=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x-n}+2, x\geq n\text{인 실수}\}$ 에 대하여 $n(A\cap B)=3$ 이기 위한 m의 범위는 ㉠$n(B\cap C)=2$ 이기 위한 n 의 범위는 ㉡이다. 빈 칸에 들어갈 값으로 알맞게 짝지은 것은?

① ㉠ $m\geq\frac{1}{2}$ ㉡ $n\geq 1$

② ㉠ $m\geq\frac{3}{2}$ ㉡ $n<1$

③ ㉠ $m>\frac{3}{2}$ ㉡ $n\geq\frac{3}{4}$

④ ㉠ $m>\frac{2}{3}$ ㉡ $n\leq\frac{3}{4}$

⑤ ㉠ $m\geq\frac{2}{3}$ ㉡ $n<\frac{3}{4}$

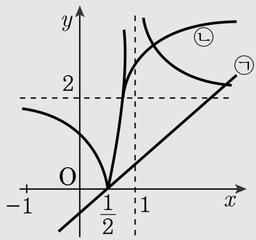
해설

㉠: 그림처럼, ㉠보다 위에 있을 때 교점이 3개 이다.

$0=m\left(\frac{1}{2}+1\right)-1$ 에서 $m=\frac{2}{3}$

$\therefore m$ 의 범위는 $m>\frac{2}{3}$

㉡: 그림의 ㉡보다 왼쪽에 있을 때 교점이 2 개이다.



$y=2$ 일 때의 교점은 $2=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|$ 에서

$\left(\frac{3}{4},\ 2\right)$

$\therefore\ n=\frac{3}{4}$

$\therefore n$ 의 범위는 $n\leq\frac{3}{4}$