

1. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a , b 의 값을 정하면?

- ① $a = \frac{3}{2}, b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}, b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}, b = 1$
④ $a = \frac{3}{2}, b = 0$ ⑤ $a = 2, b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

2. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

- ① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + b) \\ &= -(ax + b) + a = -ax + a - b \text{ 이므로 } -ax + a - b = 2x - 4 \\ \text{그런데, 이것은 } x \text{ 에 대한 항등식이므로} \\ a &= -2, b = 2 \\ \therefore ab &= -4\end{aligned}$$

3. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x+1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

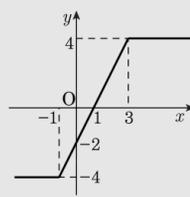
이상에서 주어진 함수의 그래프가 다

음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$



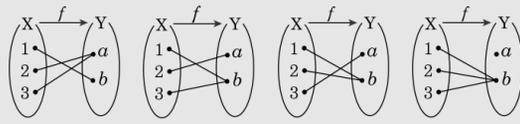
4. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



5. 두 함수 $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $(g \circ f)(2) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} (g \circ f)(2) + (g \circ f)(3) &= g(f(2)) + g(f(3)) \\ &= g(-1) + g(4) \\ &= (-1)^2 + 2 \times 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

6. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= (f^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= f^{-1} \circ (f^{-1}(5)) \\ f^{-1}(5) &= k \text{ 로 놓으면 } f(k) = -2k + 3 = 5 \\ \therefore k &= -1 \\ \therefore (\text{준식}) &= f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1) \\ f^{-1}(-1) &= l \text{ 로 놓으면} \\ f(l) &= -2l + 3 = -1 \\ \therefore l &= 2 \\ \therefore (\text{준식}) &= f^{-1}(-1) = l = 2 \end{aligned}$$

7. 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 기함수이고 $f(1) = 3$ 을 만족시킬 때, $a + b - c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

기함수는 모든 실수 x 에 대하여 원점에 대하여 대칭이어야 하므로

$$f(-x) = -f(x)$$

$$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c$$

$$\text{따라서 } a = 0, c = 0 \quad \therefore f(x) = bx$$

$$f(1) = 3 \text{ 이므로 } f(1) = b = 3$$

$$\therefore a + b - c = 3$$

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \text{ 를 만족시킨다. 이 때, } f(1998) \text{ 의 값은?}$$

- ① 3 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$f(2) = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \\ = \frac{1+3}{1-3} = -2$$

$$f(3) = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} \\ = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

$$f(4) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} \\ = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$f(5) = \frac{1+f(4)}{1-f(4)} \\ = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

$$f(5) = f(1) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(6) = f(2) = -2, f(7) = f(3) = -\frac{1}{3}$$

$$f(8) = f(4) = \frac{1}{2}, f(9) = f(5) = f(1) = 3, \dots$$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수) 은

3, -2, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$$\therefore f(4n+k) = f(k)$$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k = 0, 1, 2, 3$)

$$\text{그러므로 } f(1998) = f(4 \times 499 + 2) = f(2) = -2$$

9. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
 $x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
 $x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
 따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
 이 두 교점 사이의 거리는
 $\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

해설

$x^2 - 4x + 6 = x$,
 즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
 따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
 그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$
 $= \sqrt{2} \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

10. 일차함수 $f(x)$ 는 실수 x 에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x) = x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

- ① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면
 $x(ax + b) + a(1 - x) + b = x^2 + 2$
 $ax^2 + (-a + b)x + (a + b) = x^2 + 2$
위 식은 x 에 대한 항등식이므로
 $a = 1, b = 1$
이때 $f(x) = x + 1$ 이므로 $f(100) = 101$