1. 두 부등식 $0.3x+1.2>0.5x$, $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}<\frac{3}{4}x$을 동시에 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

$0.3x+1.2>0.5x$ 의 양변에 10을 곱하면

$3x+12>5x$

$3x-5x>-12$

$-2x>-12$

$x<6$

$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}<\frac{3}{4}x$ 의 양변에 12 를 곱하면

$8x-6<9x$

$x>-6$

따라서 $-6<x<6$이고 정수는

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 의 11개이다.

2. 연립부등식 $x - 5 \leq 2(x - 4) < 4x - 10$을 만족하는 가장 작은 자연수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x - 5 \leq 2(x - 4)$, $x - 5 \leq 2x - 8$, $3 \leq x$
$2(x - 4) < 4x - 10$, $2x - 8 < 4x - 10$, $2 < 2x$, $1 < x$
$\therefore\ x \geq 3$

3. x의 범위가 -1, 0, 1, 2일 때, 다음 부등식 중 해가 없는 것은?

① $2x < -4$ ② $x + 3 < 4$ ③ $3x - 2 \leq 1$
④ $-x + 6 \geq 7$ ⑤ $2x - 3 \geq -1$

해설
① $x < -2$
② $x < 1$
③ $x \leq 1$
④ $x \leq -1$
⑤ $x \geq 1$

4. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$ 의 해가 $-4 < x < 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, a 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

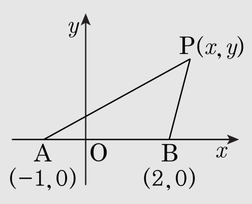
해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로
$(x+4)(x-2) < 0$
$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$
$\therefore a = -8$

5. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설



조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

6. 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x+3y+13=0$
② $2x+3y-13=0$
③ $3x+2y+13=0$
④ $3x+2y-13=0$
⑤ $3x-2y-13=0$

해설

$(2,\ 3)$이 원 위의 점이므로
$2\cdot x+3\cdot y=13$
$\therefore 2x+3y-13=0$

7. $y = x^2 - 2x + 3$ 을 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+2, y-1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 2x + 4$　　② $y = x^2 + 2x + 2$

③ $y = x^2 + 2x + 3$　　④ $y = x^2 - 6x + 8$

⑤ $y = x^2 - 6x + 10$

해설

$f : (x, y) \quad \rightarrow \quad (x + 2, y - 1)$ 에서
$x + 2 = x', y - 1 = y'$ 라 하자.
$x = x' - 2 \quad y = y' + 1$ 을 주어진 식에 대입하면,
$y' + 1 = (x' - 2)^2 - 2(x' - 2) + 3$
$y' = x'^2 - 6x' + 10$ 에서 $y = x^2 - 6x + 10$

8. 직선 $3x+4y-5=0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{5}{4}$　　③ 3　　④ $-\frac{1}{4}$　　⑤ -8

해설

직선 $3x+4y-5=0$ 를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$3(x-2)+4(y+3)-5=0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x+4y+1=0$
따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

9. 분모와 분자의 합이 54 인 기약분수를 소수로 고쳤더니 정수 부분은 0 이고, 소수 첫째 자리는 5 였다. 이 기약분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{19}{35}$

해설

$0.5 \le \frac{54-x}{x} < 0.6$

$\Rightarrow \begin{cases} 0.5x \le 54-x \\ 54-x < 0.6x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1.5x \le 54 \\ -1.6x < -54 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \le 36 \\ x > 33.75 \end{cases}$

$33.75 < x \le 36$ 인 정수 : $x = 34, 35, 36$

$x = 34$ 일 때 $\frac{20}{34}$ 이므로 기약분수가 아니다.

$x = 35$ 일 때 $\frac{19}{35}$

$x = 36$ 일 때 $\frac{18}{36}$ 이므로 기약분수가 아니다.

따라서 기약분수는 $\frac{19}{35}$ 이다.

10. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)

i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq x \leq 3$

ii) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

11. 이차함수 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < 3$ 일 때, $4mn$ 의 값은? (단, m, n 은 상수)

① -4　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \cdots$ ㉠의 해가
$-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$ 이고
$m(x+1)(x-3) > 0$
$\therefore mx^2 - 2mx - 3m > 0$
이것이 ㉠과 일치하므로
$n = -2m,\ mn + 2 = -3m$
두 식을 연립하여 풀면 $-2m^2 + 2 = -3m$ 에서
$2m^2 - 3m - 2 = 0$, $(2m+1)(m-2) = 0$
$\therefore m = -\frac{1}{2}$ $(\because m < 0)$
따라서 $n = -2m = 1$ 이므로 $4mn = -2$

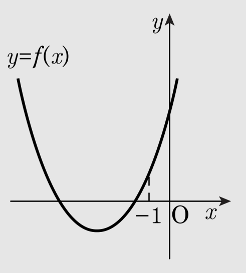
12. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

13. 좌표평면에서 점 $C(2, 3)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다.
이 원 밖의 한 점 P에서 이 원에 하나의 접선을 그을 때, 그 접점을 Q, 원점을 O라 하자.
이 때, $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{PQ}}$ 를 만족시키는 점 P의 자취방정식을 구하면?

① $2x + 3y = 6$　② $x + y = 2$　③ $3x + 2y = 6$
④ $2x - 3y = 6$　⑤ $3x - 2y = 6$

해설

점 $P(x,\ y)$와 $C(2,\ 3)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$, $\overline{CQ} = 1$
이고, $\triangle PCQ$가 직각삼각형이므로
피타고라스정리에 의하여
$\overline{PQ} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 - 1}$
$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\overline{PQ} = \overline{OP}$ 이므로
$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 - 1} = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\therefore 2x + 3y = 6$

14. 두 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, $x^2+y^2=r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을
$C_1 : (x-3)^2+(y-4)^2=9 \leftarrow$ 중심 $(3,4)$
$C_2 : x^2+y^2=r^2(r>0) \leftarrow$ 중심 $(0,0)$
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다.
이 때, $|r-3|=5$ 이어야 하므로 $r-3=\pm5$
$\therefore r=8(\because r>0)$

15. $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $y = ax + 1$과의 교점을 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 1이 되는 양수 a의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

해설

원점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 다음의 그림에서

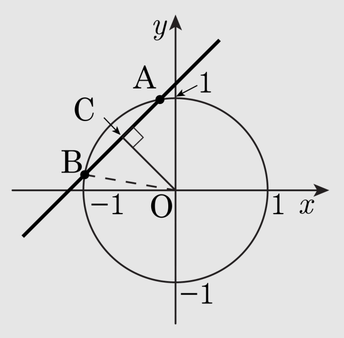
$\overline{\mathrm{AB}} = 1$, $\overline{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

($\because$ 피타고라스의 정리) 즉, O에서 직선 $y = ax + 1$에 이르는 거리 d가

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ 3a^2 + 3 = 4$, $a^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}$



16. 직선 $y = 2x$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = x + 1$ 또는 $y = 2x - 11$

② $y = 2x + 2$ 또는 $y = 4x - 4$

③ $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

④ $y = 3x + 6$ 또는 $y = 7x - 19$

⑤ $y = 6x + 3$ 또는 $y = 3x - 5$

해설

구하는 접선이 직선 $y = 2x$ 에 평행하므로
$y = 2x + b \cdots\cdots$ ㉠ 로 놓을 수 있다.
이 때, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$에서
$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$ 이므로
중심이 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$ 인 원이다.
따라서, 원의 중심 $(1, -3)$ 에서 직선 $y = 2x + b$,
즉 $2x - y + b = 0$ 까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2 + 3 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$

$|b + 5| = 10, b + 5 = \pm 10$
$\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

해설

㉠을 원의 방정식에 대입하면
$x^2 + (2x + b)^2 - 2x + 6(2x + b) - 10 = 0$
$5x^2 + 2(5 + 2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (5 + 2b)^2 - 5\left(b^2 + 6b - 10\right) = 0$$

$b^2 + 10b - 75 = 0, (b - 5)(b + 15) = 0$
$\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$ 이것을 ㉠에 대입하면
구하는 접선의 방정식은
$y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

17. 원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2+(y-4)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 과
직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5,4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x+ay+6=0$ 위에 있다.
두 점 $(5,4),(-1,8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2,6)$ 이므로
$3\cdot 2+a\cdot 6+6=0$
$\therefore a=-2$

18. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-1 \leq a \leq 1$　② $-1 < a \leq 0$　③ $-1 < a < 0$

④ $0 \leq a < 1$　⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$ 로 놓으면

$t^2 + t - 6 \geq 0$, $(t+3)(t-2) \geq 0$

$\therefore\ t \leq -3$ 또는 $t \geq 2$

(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때

$x^2 + 2ax + 3 \leq -3$ 에서 $x^2 + 2ax + 6 \leq 0$

$y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는

아래로 볼록한 포물선이므로

모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.

(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때

$x^2 + 2ax + 3 \geq 2$ 에서 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore\ -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii) 에서 $-1 \leq a \leq 1$

19. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \ge 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \le x < 3$　　② $-2 < x < 3$　　③ $2 \le x < 3$

④ $2 < x \le 3$　　⑤ $2 \le x \le 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \ge 0$에서

$x^2(x-2) + (x-2) \ge 0$

$\therefore (x-2)(x^2+1) \ge 0$

$x^2 + 1 > 0$이므로 $x - 2 \ge 0$

$\therefore x \ge 2 \cdots$ ㈎

$x^2 - x - 6 < 0$에서 $(x-3)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 3 \cdots$ ㈏

따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면

$2 \le x < 3$이다.

20. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

㉠ $b^2 - 4ac > 0$　　㉡ $a + c < b$

㉢ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.
㉡주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.

21. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $D>0$에서 $\frac{D}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ 6a>-13$

$\therefore a>-\frac{13}{6}$

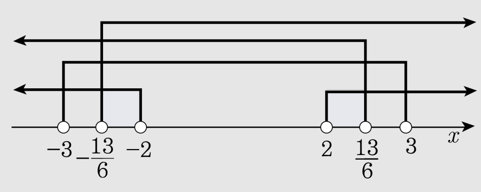
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\quad \therefore \frac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\frac{(-2a)}{2}=a$ 에서

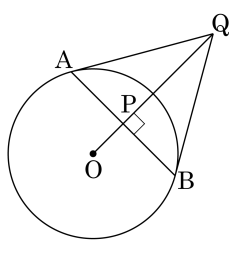
$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\frac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

22. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.

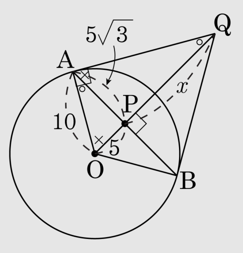


▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90°$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해



$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$

$= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 이다.

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$\therefore\ \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$\therefore\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \dfrac{75}{5} = 15$

23. 연립부등식 $2x-3 \le 4x$, $4x-10 < x+2$ 의 모든 해는 $\frac{x+a}{2} > \frac{x+2a}{3}$ 를 만족할 때, 상수 a 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -\frac{3}{2}$

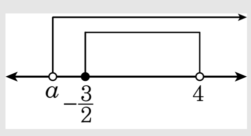
해설

연립부등식 $2x-3 \le 4x$, $4x-10 < x+2$ 을 풀면

$\therefore\ -\frac{3}{2} \le x < 4$

$\frac{x+a}{2} > \frac{x+2a}{3}$ 를 정리하면 $x > a$

$-\frac{3}{2} \le x < 4$ 의 모든 해가 $x > a$ 를 만족하려면



위의 그림과 같아야 하므로 $a < -\frac{3}{2}$ 이다.

24. $[x] = 1,\ [y] = 2,\ [z] = -1$ 일 때 $[x + 2y - z]$의 최대값과 최소값의 합은?
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

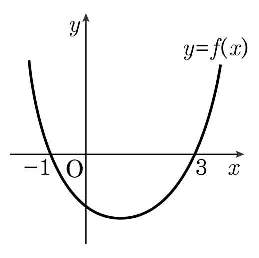
해설

$[x] = 1,\ [y] = 2,\ [z] = -1$ 에서
$1 \le x < 2,\ 2 \le y < 3,\ -1 \le z < 0$

$$\begin{array}{rl} & 1 \le x < 2 \\ & 4 \le 2y < 6 \\ +) & \underline{0 < -z \le 1} \\ & 5 < x + 2y - z < 9 \end{array}$$

$\therefore\ [x + 2y - z] = 5,\ 6,\ 7,\ 8$
최대값과 최소값의 합은 $5 + 8 = 13$

25. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 부등식 $f(x-2)>f(x)$ 의 해는?



① $x>2$　　② $0<x<2$

③ $x<2$　　④ $x>0$

⑤ $x<0$

해설

$y=f(x-2)$ 는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이다.

다음 그림에서 $a=\dfrac{1+3}{2}=2$

따라서 부등식 $f(x-2)>f(x)$ 의 해는 $x<2$ 이다.