

1. 두 부등식 $0.3x + 1.2 > 0.5x$, $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 을 동시에 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 11 개

해설

$0.3x + 1.2 > 0.5x$ 의 양변에 10을 곱하면

$$3x + 12 > 5x$$

$$3x - 5x > -12$$

$$-2x > -12$$

$$x < 6$$

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 의 양변에 12를 곱하면

$$8x - 6 < 9x$$

$$x > -6$$

따라서 $-6 < x < 6$ 이고 정수는

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 의 11개이다.

2. 연립부등식 $x - 5 \leq 2(x - 4) < 4x - 10$ 을 만족하는 가장 작은 자연수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x - 5 \leq 2(x - 4), x - 5 \leq 2x - 8, 3 \leq x$$

$$2(x - 4) < 4x - 10, 2x - 8 < 4x - 10, 2 < 2x, 1 < x$$

$$\therefore x \geq 3$$

3. x 의 범위가 $-1, 0, 1, 2$ 일 때, 다음 부등식 중 해가 없는 것은?

① $2x < -4$

② $x + 3 < 4$

③ $3x - 2 \leq 1$

④ $-x + 6 \geq 7$

⑤ $2x - 3 \geq -1$

해설

① $x < -2$

② $x < 1$

③ $x \leq 1$

④ $x \leq -1$

⑤ $x \geq 1$

4. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$ 의 해가 $-4 < x < 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, a 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$$(x + 4)(x - 2) < 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$$

$$\therefore a = -8$$

5. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

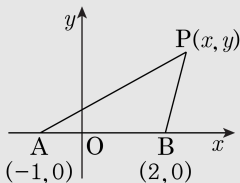
$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



6. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$

② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$

④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2, 3)$ 이 원 위의 점이므로

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

7. $y = x^2 - 2x + 3$ 을 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+2, y-1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 2x + 4$

② $y = x^2 + 2x + 2$

③ $y = x^2 + 2x + 3$

④ $y = x^2 - 6x + 8$

⑤ $y = x^2 - 6x + 10$

해설

$f : (x, y) \rightarrow (x+2, y-1)$ 에서

$x+2 = x', y-1 = y'$ 라 하자.

$x = x' - 2$ $y = y' + 1$ 을 주어진 식에 대입하면,

$$y' + 1 = (x' - 2)^2 - 2(x' - 2) + 3$$

$$y' = x'^2 - 6x' + 10 \text{ 에서 } y = x^2 - 6x + 10$$

8. 직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{5}{4}$

③ 3

④ $-\frac{1}{4}$

⑤ -8

해설

직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를

x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면

$3(x - 2) + 4(y + 3) - 5 = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

이 식을 정리하면 $3x + 4y + 1 = 0$

따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

9. 분모와 분자의 합이 54 인 기약분수를 소수로 고쳤더니 정수 부분은 0 이고, 소수 첫째 자리는 5 였다. 이 기약분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{19}{35}$

해설

$$0.5 \leq \frac{54-x}{x} < 0.6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.5x \leq 54-x \\ 54-x < 0.6x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1.5x \leq 54 \\ -1.6x < -54 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 36 \\ x > 33.75 \end{cases}$$

$33.75 < x \leq 36$ 인 정수 : $x = 34, 35, 36$

$x = 34$ 일 때 $\frac{20}{34}$ 이므로 기약분수가 아니다.

$x = 35$ 일 때 $\frac{19}{35}$

$x = 36$ 일 때 $\frac{18}{36}$ 이므로 기약분수가 아니다.

따라서 기약분수는 $\frac{19}{35}$ 이다.

10. x 에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ① $a < b$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
- ② $a < b$ 일 때, $x \leq -1$, $x \leq 3$ 이다.
- ③ $a < 0$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
- ④ $b < 0$ 일 때, $x \leq -1$, $x \geq 3$ 이다.
- ⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 을 이항하여 정리하면
 $(a - b)x^2 - 2(a - b)x - 3(a - b) \geq 0$ (이차부등식이므로 $a \neq b$)

i) $a < b$ 이면 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \leq 0$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3$$

ii) $a > b$ 이면

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1, x \geq 3$$

11. 이차함수 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < 3$ 일 때, $4mn$ 의 값은? (단, m, n 은 상수)

① -4

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \cdots \textcircled{1}$ 의 해가

$-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$ 이고

$$m(x+1)(x-3) > 0$$

$$\therefore mx^2 - 2mx - 3m > 0$$

이것이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$n = -2m, mn + 2 = -3m$$

두 식을 연립하여 풀면 $-2m^2 + 2 = -3m$ 에서

$$2m^2 - 3m - 2 = 0, (2m+1)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2} (\because m < 0)$$

따라서 $n = -2m = 1$ 이므로 $4mn = -2$

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

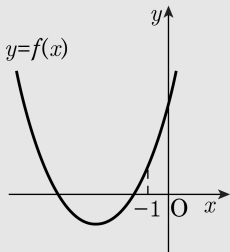
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면

방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6 - k) > 0$ 에서

$$k^2 + k - 6 > 0, (k + 3)(k - 2) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 2$$

(ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

(iii) $-\frac{2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$

이상에서 $-7 < k < -1$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4$ 의 3개다.

13. 좌표평면에서 점 $C(2, 3)$ 을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1 인 원이 있다.

이 원 밖의 한 점 P 에서 이 원에 하나의 접선을 그을 때, 그 접점을 Q , 원점을 O 라 하자.

이 때, $\overline{OP} = \overline{PQ}$ 를 만족시키는 점 P 의 자취방정식을 구하면?

- ① $2x + 3y = 6$ ② $x + y = 2$ ③ $3x + 2y = 6$
④ $2x - 3y = 6$ ⑤ $3x - 2y = 6$

해설

점 $P(x, y)$ 와 $C(2, 3)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}, \overline{CQ} = 1$$

이고, $\triangle PCQ$ 가 직각삼각형이므로

피타고라스정리에 의하여

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 - 1}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}, \overline{PQ} = \overline{OP} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 - 1} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore 2x + 3y = 6$$

14. 두 원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, $x^2 + y^2 = r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을

$$C_1 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9 \leftarrow \text{중심 } (3, 4)$$

$$C_2 : x^2 + y^2 = r^2 (r > 0) \leftarrow \text{중심 } (0, 0)$$

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이다.

이 때, $|r - 3| = 5$ 이어야 하므로 $r - 3 = \pm 5$

$$\therefore r = 8 (\because r > 0)$$

15. $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = ax + 1$ 과의 교점을 A, B라 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이가 1이 되는 양수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{\sqrt{5}}{5}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

해설

원점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 다음의 그림에서

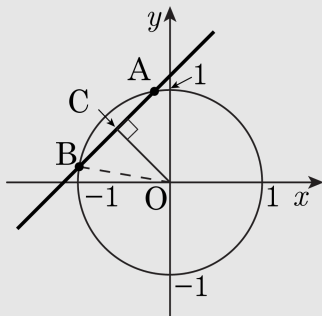
$$\overline{AB} = 1, \overline{AC} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

($\because$ 피타고라스의 정리) 즉, O에서 직선 $y = ax + 1$ 에 이르는 거리 d 가

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore 3a^2 + 3 = 4, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



16. 직선 $y = 2x$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

- ① $y = x + 1$ 또는 $y = 2x - 11$
- ② $y = 2x + 2$ 또는 $y = 4x - 4$
- ③ $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$
- ④ $y = 3x + 6$ 또는 $y = 7x - 19$
- ⑤ $y = 6x + 3$ 또는 $y = 3x - 5$

해설

구하는 접선이 직선 $y = 2x$ 에 평행하므로

$y = 2x + b \dots\dots\dots$ ㉠ 로 놓을 수 있다.

이 때, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에서

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$ 이므로

중심이 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$ 인 원이다.

따라서, 원의 중심 $(1, -3)$ 에서 직선 $y = 2x + b$,

즉 $2x - y + b = 0$ 까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2 + 3 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$

$$|b + 5| = 10, b + 5 = \pm 10$$

$$\therefore b = 5 \text{ 또는 } b = -15$$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x + 5 \text{ 또는 } y = 2x - 15$$

해설

㉠을 원의 방정식에 대입하면

$$x^2 + (2x + b)^2 - 2x + 6(2x + b) - 10 = 0$$

$$5x^2 + 2(5 + 2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (5 + 2b)^2 - 5(b^2 + 6b - 10) = 0$$

$$b^2 + 10b - 75 = 0, (b - 5)(b + 15) = 0$$

$$\therefore b = 5 \text{ 또는 } b = -15 \text{ 이것을 ㉠에 대입하면}$$

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x + 5 \text{ 또는 } y = 2x - 15$$

17. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦은 원 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 과

직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.

두 점 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 6) \text{ 이므로}$$

$$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

18. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-1 \leq a \leq 1$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-1 < a < 0$
 ④ $0 \leq a < 1$ ⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 6 \geq 0, (t+3)(t-2) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -3 \text{ 또는 } t \geq 2$$

(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때

$$x^2 + 2ax + 3 \leq -3 \text{ 에서 } x^2 + 2ax + 6 \leq 0$$

$y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는

아래로 볼록한 포물선이므로

모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.

(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때

$$x^2 + 2ax + 3 \geq 2 \text{ 에서 } x^2 + 2ax + 1 \geq 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$$x^2 + 2ax + 1 = 0 \text{ 의 판별식을 } D \text{ 라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore -1 \leq a \leq 1$$

(i), (ii)에서 $-1 \leq a \leq 1$

19. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \leq x < 3$

② $-2 < x < 3$

③ $2 \leq x < 3$

④ $2 < x \leq 3$

⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \geq 0$ 에서

$x^2(x-2) + (x-2) \geq 0$

$\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$

$x^2+1 > 0$ 이므로 $x-2 \geq 0$

$\therefore x \geq 2 \cdots (가)$

$x^2 - x - 6 < 0$ 에서 $(x-3)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 3 \cdots (나)$

따라서 (가), (나)의 공통 범위를 구하면

$2 \leq x < 3$ 이다.

20. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식

$$\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases} \quad \text{의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상}$$

옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

㉠ $b^2 - 4ac > 0$

㉡ $a + c < b$

㉢ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 두 식의 판별식 값이

모두 $b^2 - 4ac$ 이고

$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.

㉡주어진 식에

1을 대입하면 성립한다.

21. 이차방정식 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -3 과 3 사이에 있도록 하는 정수 a 의 개수는?(단, $f(x) = x^2 - 2ax + 4$ 로 두고 풀어라.)

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$x^2 - 2ax + 4 = 0$ 의 서로 다른 두 근이

-3 과 3 사이에 있으면

(i) $D > 0$, (ii) $f(-3) > 0$, (iii) $f(3) > 0$, (iv) 대칭축이 -3 과 3 사이에 있다.

(i) $D > 0$ 에서 $\frac{D}{4} = a^2 - 4 > 0$

$(a-2)(a+2) > 0$

$\therefore a < -2, a > 2$

(ii) $f(-3) > 0$ 에서

$f(-3) = 9 + 6a + 4 > 0, 6a > -13$

$\therefore a > -\frac{13}{6}$

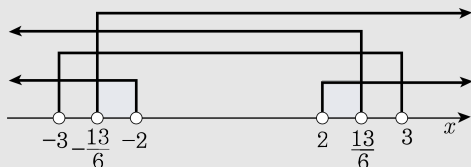
(iii) $f(3) > 0$ 에서

$f(3) = 9 - 6a + 4 > 0, 13 > 6a, \therefore \frac{13}{6} > a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x = -\frac{(-2a)}{2} = a$ 에서

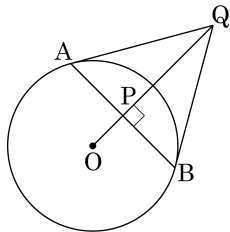
$-3 < a < 3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a 값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore -\frac{13}{6} < a < -2, 2 < a < \frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

22. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고
 $\angle OPA = 90^\circ$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

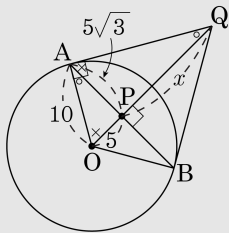
$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$$\therefore \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \frac{75}{5} = 15$$



23. 연립부등식 $2x - 3 \leq 4x$, $4x - 10 < x + 2$ 의 모든 해는 $\frac{x+a}{2} > \frac{x+2a}{3}$ 를 만족할 때, 상수 a 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $a < -\frac{3}{2}$

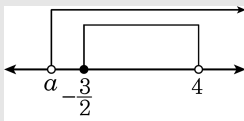
해설

연립부등식 $2x - 3 \leq 4x$, $4x - 10 < x + 2$ 을 풀면

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x < 4$$

$\frac{x+a}{2} > \frac{x+2a}{3}$ 를 정리하면 $x > a$

$-\frac{3}{2} \leq x < 4$ 의 모든 해가 $x > a$ 를 만족하려면



위의 그림과 같아야 하므로 $a < -\frac{3}{2}$ 이다.

24. $[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = -1$ 일 때 $[x + 2y - z]$ 의 최대값과 최소값의 합은?

(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

$[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = -1$ 에서

$1 \leq x < 2$, $2 \leq y < 3$, $-1 \leq z < 0$

$1 \leq x < 2$

$4 \leq 2y < 6$

+) $0 < -z \leq 1$

$5 < x + 2y - z < 9$

$\therefore [x + 2y - z] = 5, 6, 7, 8$

최대값과 최소값의 합은 $5 + 8 = 13$

25. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 부등식 $f(x-2) > f(x)$ 의 해는?

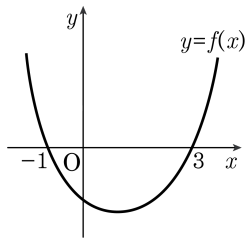
① $x > 2$

② $0 < x < 2$

③ $x < 2$

④ $x > 0$

⑤ $x < 0$



해설

$y = f(x-2)$ 는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이다.

다음 그림에서 $a = \frac{1+3}{2} = 2$

따라서 부등식 $f(x-2) > f(x)$ 의 해는 $x < 2$ 이다.

