

1. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0 \text{이므로}$$

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-4 \leq 2 \\ 5-2x < 9 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \leq b$ 이다. 이때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$$3x - 4 \leq 2$$

$$3x \leq 6$$

$$\therefore x \leq 2$$

$$5 - 2x < 9$$

$$2x > -4$$

$$\therefore x > -2$$

따라서 $-2 < x \leq 2$ 에서 $a = -2, b = 2$ 이다.

3. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + pxy + qy^2 \geq 0$ 이 항상 성립하려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $p < q$

② $p^2 \leq q$

③ $p \leq q^2$

④ $p^2 \leq 4q$

⑤ $p^2 \geq 4q^2$

해설

모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + pxy + qy^2 \geq 0$ 이 항상 성립하려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + pxy + qy^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때
 $D = (py)^2 - 4qy^2 \leq 0$
 $(p^2 - 4q)y^2 \leq 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 모든 실수 y 에 대하여 성립하려면
 $p^2 - 4q \leq 0$ 이어야 한다.
 $\therefore p^2 \leq 4q$

4. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ 의 중심과 점 $(4, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a + b + r^2$ 의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$
 $\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 1$
 $\therefore$ 구하는 원은 $(-2, 5)$ 와 $(4, -1)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.
이 원은 중심이 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (1, 2)$
반지름이 $\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + (-1-5)^2} = 3\sqrt{2}$
이므로 원의 방정식은
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$
 $\therefore a = 1, b = 2, r^2 = 18$
 $\therefore a + b + r^2 = 21$

5. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

- ① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

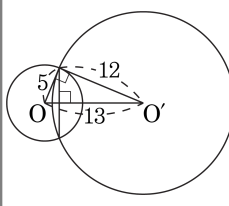
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



6. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ 에 의하여 점 $(-4, 8)$ 은 점 (a, b) 로 옮겨진다. 이때 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ 이므로
 $(-4, 8) \rightarrow (-4 + 2, 8 - 1) = (-2, 7)$
 $\therefore a + b = 5$

7. 포물선 $y = x^2 - 3x - 2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 3x - 2$

② $y = x^2 - 3x + 2$

③ $y = -x^2 - 3x - 2$

④ $y = -x^2 + 3x - 2$

⑤ $y = -x^2 + 3x + 2$

해설

x 축대칭은 $y \rightarrow -y$ 를 대입하면 된다.

8. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

- (i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼
평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$
즉, $(5, 9)$
(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$
(i), (ii)로부터 $2b - 1 = 9 \quad \therefore b = 5$

9. 다음 두 방정식이 공통근 α 를 갖는다. 이 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 에서 } -2\alpha + 2 = 0 \quad \therefore \alpha = 1$$

$$\alpha = 1 \text{ 을 } \textcircled{2} \text{ 에 대입하면 } 1 + m + 2 - 4 = 0$$

$$\therefore m = 1$$

$$\therefore m + \alpha = 2$$

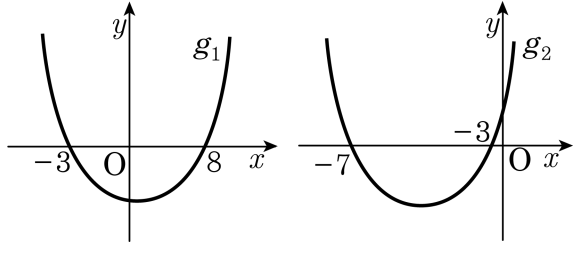
10. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \leq 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

① 9개 ② 8개 ③ 7개 ④ 6개 ⑤ 5개

해설

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0.3x - 0.5 \leq 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 3x - 5 \leq 4 \\ x - 3 > -18 - 2x \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -5 \end{cases} \\ \therefore & -5 < x \leq 3 \end{aligned}$$

11. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
 g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
 g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
 $x^2 + 10x - 24 < 0, (x + 12)(x - 2) < 0$
 $\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

12. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a > 6$ ② $a > 5$ ③ $a > 4$ ④ $a > 3$ ⑤ $a > 2$

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + a = (x - 2)^2 + a - 4 \text{ 에서}$$

$f(x)$ 의 최솟값은 $a - 4$,

$$g(x) = -x^2 - 2x + 1$$

$$= -(x + 1)^2 + 2 \text{ 에서}$$

$g(x)$ 의 최댓값은 2

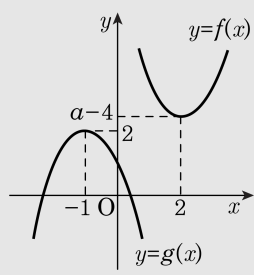
한편, 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여

$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이

$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다

커야하므로

$$a - 4 > 2 \quad \therefore a > 6$$



13. 점 $(0, 2)$ 를 점 $(1, 0)$ 으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $ax+y+b=0$ 이 직선 $2x+y+3=0$ 으로 평행이동될 때, 상수 a, b 에 대하여 $2a-b$ 의 값을 구하여라.

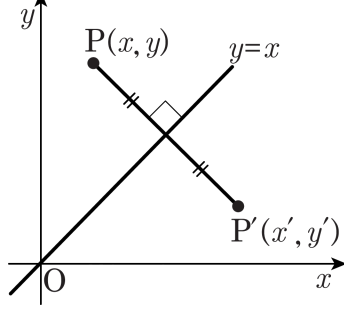
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 $(0, 2)$ 를 점 $(1, 0)$ 으로 옮기는 평행이동은
 $(x, y) \rightarrow (x+1, y-2)$
이때, 직선 $ax+y+b=0$ 을
 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
 $a(x-1)+(y+2)+b=0$
 $ax+y+b-a+2=0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
직선 $\textcircled{1}$ 이 직선 $2x+y+3=0$ 과 같아야 하므로
 $a=2, b-a+2=3$ 에서 $b=3$
 $\therefore 2a-b=4-3=1$

14. 다음은 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P' 의 좌표를 구하는 과정이다. 이 때, (가) ~ (라)에 알맞지 않은 것은?



점 $P(x, y)$ 를
 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라고 하면
 선분 PP' 의 중점
 $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 은
 직선 (가) 위에 있으므로
 $\frac{y+y'}{2} = (\text{나}) \dots\dots \text{㉠}$
 또한, 직선 PP' 은 직선 $y = x$ 와 수직이므로
 $1 \times (\text{다}) = -1 \leftarrow (\text{수직인 두 직선의 기울기의 곱이 } -1)$
 이것을 정리하면
 $x' + y' = (\text{라}) \dots\dots \text{㉡}$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x' = y, y' = x$
 따라서, 구하는 점 P' 의 좌표는 (마) 이다.

- ① (가) : $y = x$ ② (나) : $\frac{x+x'}{2}$ ③ (다) : $\frac{y'-y}{x'-x}$
 ④ (라) : $x + y$ ⑤ (마) : (x, y)

해설

구하는 점 P' 의 좌표는 (y, x) 이다.

15. 직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1, 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이동한 직선의 방정식은 $5y + 12x + k = 0$

즉, $12x + 5y + k = 0$

이 직선과 점 $(1, 1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + k|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2$$

$$\frac{|17 + k|}{13} = 2$$

$$|k + 17| = 26$$

$$k + 17 = \pm 26$$

$$\therefore k = 9 \text{ 또는 } k = -43$$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$$9 + (-43) = -34$$

16. 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 점 (1, 3) 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① (-1, -2)

② (1, -3)

③ (-1, 2)

④ (1, 3)

⑤ (2, 2)

해설

i) 대칭인 점을 (X, Y) 라 하면, (1, 3) 과 (X, Y) 를 잇는 선분은 $y = x + 1$ 에 수직이다

$$\Rightarrow \frac{Y-3}{X-1} = -1 \Rightarrow X+Y-4=0$$

ii) (1, 3) 과 (X, Y) 의 중점은 $y = x + 1$ 위에 있다

$$\Rightarrow \frac{Y+3}{2} = \frac{X+1}{2} + 1 \Rightarrow X-Y=0$$

i), ii) 를 연립하면, $X=2, Y=2$

$\therefore (2, 2)$

17. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ ② $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $x^2 + y^2 = 4$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 2인 ④이다.

18. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$a = bc, b = ca, c = ab,$$

$$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$$

$$abc \neq 0, \quad abc = 1,$$

$$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$$

$$a = \pm 1, \quad b = \pm 1, \quad c = \pm 1$$

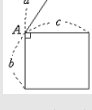
그러나 $abc = 1$ 이므로, a, b, c 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.

$$\therefore (a, b, c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

19. 직육면체의 한 꼭짓점 A에 모인 세면의 넓이의 비가 2 : 3 : 4 일 때, 꼭짓점 A에 모인 세 모서리의 길이의 비를 구하면?

- ① 2 : 3 : 4
- ② 4 : 3 : 7
- ③ 3 : 1 : 4
- ④ 4 : 3 : 6
- ⑤ 4 : 5 : 6

해설



꼭짓점 A의 각면은 넓이비가 2 : 3 : 4 이므로,

$$\begin{cases} ab = 2k^2 \dots ① \\ bc = 3k^2 \dots ② \\ ca = 4k^2 \dots ③ \end{cases}$$

(k는 양의 상수)

$$ab \times bc \times ca = 2k^2 \cdot 3k^2 \cdot 4k^2, (abc)^2 = 24k^6$$

$$\therefore abc = 2\sqrt{6}k^3 \dots ④$$

$$④ \div ② \text{ 하면 } a = \frac{2}{3}\sqrt{6}k$$

$$④ \div ③ \text{ 하면 } b = \frac{\sqrt{6}}{2}k$$

$$④ \div ① \text{ 하면 } c = \sqrt{6}k$$

$$\therefore a : b : c = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : 1 = 4 : 3 : 6$$

20. 두 부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$, $|x| < |a|$ 의 해가 같을 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$|x| < |a|$ 에서 양변을 제곱하면
 $x^2 < a^2$ 이므로
 $x^2 - a^2 < 0 \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $a(a < 0)$ 를 곱하면
 $ax^2 - a^3 > 0$ 이고
이것이 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 과
일치해야 하므로
 $a^2 - 1 = 0, b = -a^3$
 $\therefore a = -1, b = 1$
 $\therefore a + b = 0$

21. 두 점 A(-1, 3), B(2, a)를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

㉠ -1 ㉡ 0 ㉢ 1 ㉣ 2 ㉤ 3

해설

두 점 A(-1, 3), B(2, a)를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore (a-3)x - 3y + a + 6 = 0 \dots\dots\textcircled{\text{A}}$

직선 $\textcircled{\text{A}}$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로

원의 중심 (0, 0) 에서 직선 $\textcircled{\text{A}}$ 에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore \frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}} = 1$

$\therefore |a+6| = \sqrt{(a-3)^2+9} \dots\dots\textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{B}}$ 의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36 = a^2-6a+9+9, 18a = -18$

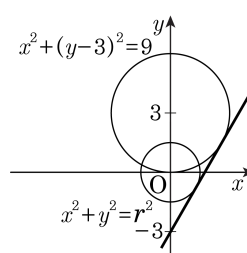
$\therefore a = -1$

22. 다음 그림과 같이 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + (y-3)^2 = 9$ 의 공통 외접선 l 의 y 절편이 -3 이다. 직선 l 의 기울기를 m 이라고 하면 $\frac{m^2}{r}$ 의 값은?(단, $0 < r < 3$)

① $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$

② 1
⑤ 2

③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$



해설

y 절편이 -3 인 직선의 방정식을 $y = mx - 3$ 이라 하면

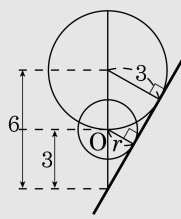
$x^2 + (y-3)^2 = 9$ 와 l 이 접하므로,

$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}} = 3, \quad m^2 = 3$$

그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면, 그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음비가 $2:1$ 이다.

$$6:3 = 3:r \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{m^2}{r} = 2$$



23. 사차방정식 $x^4 - 2x^2 + ax + b = 0$ 이 허근 $1 + 2i$ 를 가질 때, 실근 α, β 와 a, b 의 합 $\alpha + \beta + a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -1

③ 2

④ 5

⑤ 7

해설

계수가 실수이므로 $1 + 2i$ 가 근이면 $1 - 2i$ 도 근이다.

따라서 $f(x) = x^4 - 2x^2 + ax + b$ 는 $\{x - (1 + 2i)\} \{x - (1 - 2i)\}$

즉, $x^2 - 2x + 5$ 로 나누어 떨어져야 한다.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + ax + b = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 3) + (a - 16)x + b + 15$$

$$\text{따라서, } a = 16, b = -15$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{에서 } a + \beta = -2$$

$$\therefore \alpha + \beta + a + b = -1$$

24. $a-2b-8 < (a+2b)x < 5a+4b+2$ 를 만족하는 x 의 범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 정수 a, b 에 대하여 $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 부등식의 각 변을 $a+2b$ 로 나눌 때,

1) $a+2b > 0$ 이면

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} < x < \frac{5a+4b+2}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 과 같으므로,

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \frac{5a+4b+2}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a = -2, b = 5$ 이고 $a+2b > 0$ 을 만족하고 정수이므로 적합하다.

2) $a+2b < 0$ 이면

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} < x < \frac{a-2b-8}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 와 같으므로,

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \frac{a-2b-8}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a = \frac{62}{33}, b = -\frac{59}{33}$ 이고 a, b 의 값은 정수가 아니므로 적합하지 않다.

따라서 $a = -2, b = 5$ 이므로 $a \times b = -10$ 이다.

25. 6 개의 구슬 A, B, C, D, E, F 중 5 개의 무게는 같고, 나머지 1 개의 무게는 다르다. A, B 의 무게의 합은 C, D 의 무게의 합보다 작고, B, C 의 무게의 합은 E, F 의 무게의 합보다 작을 때, 무게가 다른 구슬을 찾아라.

▶ 답 :

▷ 정답 : B

해설

6 개의 구슬 A, B, C, D, E, F 의 무게를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면

$$a + b < c + d \cdots \textcircled{1}$$

$$b + c < e + f \cdots \textcircled{2}$$

① 에서 A, B, C, D 구슬 중 무게가 다른 것이 있으므로 E, F 의 구슬의 무게는 같다. 마찬가지로 ② 에서 A, D 구슬의 무게는 같다.

따라서 ① 에서 $b < c$ 이므로 ② 에서 $b + c < e + f$ 인 것은 구슬 B 의 무게 때문이다.

즉, B 구슬의 무게가 다른 구슬들과 다르다.