1. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로

두 허근 α, β는

각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로

$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-4 \le 2 \\ 5-2x < 9 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \le b$ 이다. 이때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$3x-4 \le 2$

$3x \le 6$

$\therefore\ x \le 2$

$5-2x < 9$

$2x > -4$

$\therefore\ x > -2$

따라서 $-2 < x \le 2$ 에서 $a=-2,\ b=2$ 이다.

3. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \geq 0$이 항상 성립하려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $p<q$ ② $p^2 \leq q$ ③ $p \leq q^2$

④ $p^2 \leq 4q$ ⑤ $p^2 \geq 4q^2$

해설

모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \geq 0$이 항상 성립하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+pxy+qy^2=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(py)^2-4qy^2 \leq 0$

$(p^2-4q)y^2 \leq 0 \cdots ㉠$

㉠이 모든 실수 y에 대하여 성립하려면

$p^2-4q \leq 0$이어야 한다.

$\therefore p^2 \leq 4q$

4. 원 $x^2+y^2+4x-10y+28=0$의 중심과 점 $(4,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이라고 할 때, $a+b+r^2$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$x^2+y^2+4x-10y+28=0$

$\Rightarrow\ (x+2)^2+(y-5)^2=1$

$\therefore$ 구하는 원은 $(-2,\ 5)$와 $(4,\ -1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.

이 원은 중심이 $\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{5-1}{2}\right)=(1,\ 2)$

반지름이 $\dfrac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{2}$

이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=(3\sqrt{2})^2=18$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ r^2=18$

$\therefore\ a+b+r^2=21$

5. 두 원 O와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

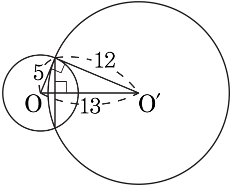
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore \ x = \frac{120}{13}$$



6. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+2,\ y-1)$에 의하여 점 $(-4,\ 8)$은 점 $(a,\ b)$로 옮겨진다. 이때 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(x,\ y) \to (x+2,\ y-1)$이므로

$(-4,\ 8) \to (-4+2,\ 8-1) = (-2,\ 7)$

$\therefore\ \ a+b=5$

7. 포물선 $y=x^2-3x-2$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $y=x^2+3x-2$
② $y=x^2-3x+2$
③ $y=-x^2-3x-2$
④ $y=-x^2+3x-2$
⑤ $y=-x^2+3x+2$

해설

x축대칭은 $y\to -y$를 대입하면 된다.

8. 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점은 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점과 같다. 이때, 상수 b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

(i) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2 \cdot 3 - 1)$ 즉, $(5, 5)$
점 $(5, 5)$ 를 다시 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(5, 5 + 4)$ 즉, $(5, 9)$

(ii) 점 $(5, 1)$ 을 직선 $y = b$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(5, 2b - 1)$

(i), (ii) 로부터 $2b - 1 = 9$ $\therefore b = 5$

9. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$ ㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\quad\therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ m=1$

$\therefore\ m+\alpha=2$

10. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x는 모두 몇 개인가?

① 9개 ② 8개 ③ 7개 ④ 6개 ⑤ 5개

해설

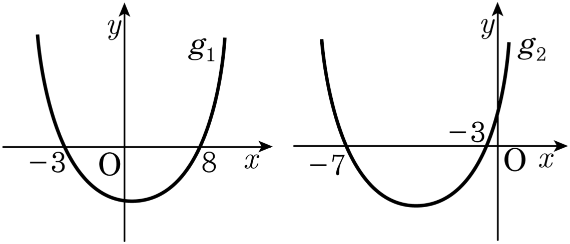
$$\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 5 \le 4 \\ x - 3 > -18 - 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x > -5 \end{cases}$$

$\therefore\ -5 < x \le 3$

11. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로

g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)

을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로

g_2 의 일차항 $a = 10$

($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)

이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면

$x^2 + 10x - 24 < 0,\ (x+12)(x-2) < 0$

$\therefore -12 < x < 2$

따라서 만족하는 정수는 13 (개)

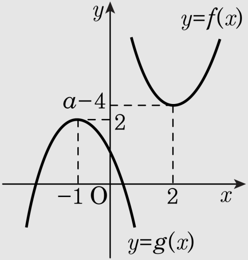
12. 이차함수 $f(x)=x^2-4x+a$ 와 $g(x)=-x^2-2x+1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a>6$ ② $a>5$ ③ $a>4$ ④ $a>3$ ⑤ $a>2$

해설

$f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a-4$,
$g(x)=-x^2-2x+1$
$=-(x+1)^2+2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1)>g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로
$a-4>2$ $\therefore$ $a>6$



13. 점 (0, 2) 를 점 (1, 0) 으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $ax+y+b=0$ 이 직선 $2x+y+3=0$ 으로 평행이동될 때, 상수 a, b 에 대하여 $2a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 (0, 2) 를 점 (1, 0) 으로 옮기는 평행이동은

$(x,\ y) \ \rightarrow \ (x+1,\ y-2)$

이때, 직선 $ax+y+b=0$ 을

x 축의 방향으로 1만큼,

y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$a(x-1)+(y+2)+b=0$

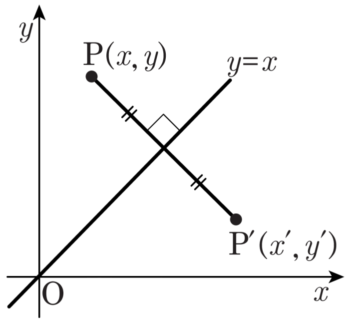
$ax+y+b-a+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 직선 $2x+y+3=0$ 과 같아야 하므로

$a=2,\ b-a+2=3$ 에서 $b=3$

$\therefore\ 2a-b=4-3=1$

14. 다음은 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P' 의 좌표를 구하는 과정이다. 이 때, (가) ~ (라) 에 알맞지 않은 것은?



점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$ 이라고 하면
선분 PP' 의 중점
$\mathrm{M}\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$ 은
직선 (가) 위에 있으므로
$\dfrac{y+y'}{2} =$(나)$\cdots\cdots$㉠
또한, 직선 PP' 은 직선 $y = x$ 와 수직이므로
$1\times$(다) $= -1$ ← (수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1)
이것을 정리하면
$x' + y' =$(라) $\cdots\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x' = y, y' = x$
따라서, 구하는 점 P' 의 좌표는 (마) 이다.

① (가) : $y = x$ ② (나) : $\dfrac{x+x'}{2}$ ③ (다) : $\dfrac{y'-y}{x'-x}$
④ (라) : $x+y$ ⑤ (마) : $(x,\ y)$

해설

구하는 점 P' 의 좌표는 $(y,\ x)$ 이다.

15. 직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1,\ 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여
대칭이동한 직선의 방정식은 $5y+12x+k=0$
즉, $12x+5y+k=0$
이 직선과 점 $(1,1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12\cdot1+5\cdot1+k|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$$

$$\frac{|17+k|}{13}=2$$

$|k+17|=26$

$k+17=\pm26$

$\therefore k=9$ 또는 $k=-43$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은
$9+(-43)=-34$

16. 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 점 $(1,\ 3)$ 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① $(-1,\ -2)$ ② $(1,\ -3)$ ③ $(-1,\ 2)$

④ $(1,\ 3)$ ⑤ $(2,\ 2)$

해설

i) 대칭인 점을 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 라 하면, $(1,\ 3)$ 과 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 를 잇는 선분은 $y=x+1$ 에 수직이다

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Y}-3}{\mathrm{X}-1}=-1 \Rightarrow \mathrm{X}+\mathrm{Y}-4=0$$

ii) $(1,\ 3)$ 과 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 의 중점은 $y=x+1$ 위에 있다

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Y}+3}{2}=\frac{\mathrm{X}+1}{2}+1 \Rightarrow \mathrm{X}-\mathrm{Y}=0$$

i), ii) 를 연립하면, $\mathrm{X}=2,\ \mathrm{Y}=2$

$\therefore\ (2,\ 2)$

17. 다음 중 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$ ② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ④ $x^2+y^2=4$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 2인 ④이다.

18. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a = bc,\ b = ca,\ c = ab,$

$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$

$abc \neq 0, \quad abc = 1,$

$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$

$a = \pm 1,\ b = \pm 1,\ c = \pm 1$

그러나 $abc = 1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.

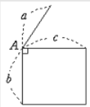
$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$

19. 직육면체의 한 꼭짓점 A에 모인 세면의 넓이의 비가 $2:3:4$ 일 때, 꼭짓점 A에 모인 세 모서리의 길이의 비를 구하면?

① $2:3:4$ ② $4:3:7$ ③ $3:1:4$

④ $4:3:6$ ⑤ $4:5:6$

해설



꼭지점 A 의 각면은 넓이비가 $2:3:4$ 이므로,

$$\begin{cases} ab = 2k^2 \cdots ① \\ bc = 3k^2 \cdots ② \\ ca = 4k^2 \cdots ③ \end{cases}$$

(k 는 양의 상수)

$ab \times bc \times ca = 2k^2 \cdot 3k^2 \cdot 4k^2,\ (abc)^2 = 24k^6$

$\therefore\ abc = 2\sqrt{6}k^3 \cdots ④$

④÷ ② 하면 $a = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}k$

④÷ ③ 하면 $b = \dfrac{\sqrt{6}}{2}k$

④÷ ① 하면 $c = \sqrt{6}k$

$\therefore\ a:b:c = \dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{2}:1 = 4:3:6$

20. 두 부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$, $|x| < |a|$의 해가 같을 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$|x| < |a|$ 에서 양변을 제곱하면
$x^2 < a^2$ 이므로
$x^2 - a^2 < 0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $a(a < 0)$ 를 곱하면
$ax^2 - a^3 > 0$ 이고
이것이 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 과
일치해야 하므로
$a^2 - 1 = 0, b = -a^3$
$\therefore a = -1,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 0$

21. 두 점 $\mathrm{A}(-1,3)$, $\mathrm{B}(2,a)$를
지나는 직선이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 $\mathrm{A}(-1,3)$, $\mathrm{B}(2,a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y-3=\dfrac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x-3y+a+6=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접하므로
원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

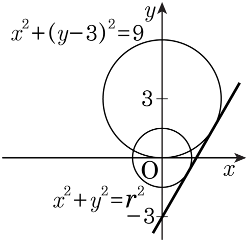
$\therefore\ \dfrac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$

$\therefore\ |a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36=a^2-6a+9+9$,$18a=-18$

$\therefore\ a=-1$

22. 다음 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+(y-3)^2=9$ 의 공통 외접선 l의 y절편이 -3이다. 직선 l의 기울기를 m이라고 하면 $\frac{m^2}{r}$의 값은?(단, $0<r<3$)



① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

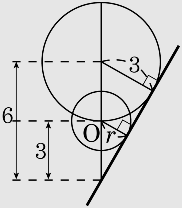
해설

y 절편이 -3 인 직선의 방정식을 $y=mx-3$ 이라 하면

$x^2+(y-3)^2=9$와 l 이 접하므로,

$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$,　$m^2=3$

그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면, 그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음비가 $2:1$ 이다.



$6:3=3:r$　$\therefore\ r=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{m^2}{r}=2$

23. 사차방정식 $x^4-2x^2+ax+b=0$이 허근 $1+2i$를 가질 때, 실근 α,β와 a,b의 합 $\alpha+\beta+a+b$의 값은? (단, a,b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 7

해설

계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 $1-2i$도 근이다.
따라서 $f(x)=x^4-2x^2+ax+b$는 $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$
즉, x^2-2x+5로 나누어 떨어져야 한다.
$f(x) = x^4-2x^2+ax+b = (x^2-2x+5)(x^2+2x-3)+(a-16)x+b+15$
따라서, $a=16,\ b=-15$
$x^2+2x-3=0$에서 $\alpha+\beta=-2$
$\therefore\ \alpha+\beta+a+b=-1$

24. $a-2b-8 < (a+2b)x < 5a+4b+2$ 를 만족하는 x 의 범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 정수 a, b 에 대하여 $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 부등식의 각 변을 $a+2b$ 로 나눌 때,

1) $a+2b>0$ 이면

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} < x < \frac{5a+4b+2}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 과 같으므로,

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \frac{5a+4b+2}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=5$ 이고 $a+2b>0$ 을 만족하고 정수이므로 적합하다.

2) $a+2b<0$ 이면

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} < x < \frac{a-2b-8}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 와 같으므로,

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \frac{a-2b-8}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{62}{33}$, $b=-\frac{59}{33}$ 이고 a, b 의 값은 정수가 아니므로 적합하지 않다.

따라서 $a=-2$, $b=5$ 이므로 $a \times b = -10$ 이다.

25. 6 개의 구슬 A, B, C, D, E, F 중 5 개의 무게는 같고, 나머지 1개의 무게는 다르다. A, B 의 무게의 합은 C, D 의 무게의 합보다 작고, B, C 의 무게의 합은 E, F 의 무게의 합보다 작을 때, 무게가 다른 구슬을 찾아라.

▶ 답 :

▷ 정답 : B

해설

6 개의 구슬 A, B, C, D, E, F 의 무게를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면

$a+b<c+d\cdots$ ㉠

$b+c<e+f\cdots$ ㉡

㉠ 에서 A, B, C, D 구슬 중 무게가 다른 것이 있으므로 E, F 의 구슬의 무게는 같다. 마찬가지 방법으로 ㉡ 에서 A, D 구슬의 무게는 같다.

따라서 ㉠ 에서 $b<c$ 이므로 ㉡ 에서 $b+c<e+f$ 인 것은 구슬 B 의 무게 때문이다.

즉, B 구슬의 무게가 다른 구슬들과 다르다.