

1. 세 자리 수 997 은 소수이다. 이 사실을 이용하여 여섯 자리 수 997997 의 약수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$$997997 = 997 \times 1001 = 997 \times 7 \times 143 = 7 \times 11 \times 13 \times 997, \\ \therefore 997997 \text{ 의 약수의 개수} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ 개}$$

2. 120^9 은 2800 개의 서로 다른 약수를 가지고 있다. 이 약수 중 제곱수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 350 개

해설

120 을 소인수분해하면 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 $120^9 = (2^3 \times 3 \times 5)^9 = 2^{27} \times 3^9 \times 5^9$ 이다. 따라서 120^9 의 약수의 개수는 $(27 + 1) \times (9 + 1) \times (9 + 1) = 2800$ 개이고,
이 중 제곱수는 지수가 모두 짝수로 이루어져 있어야 한다.
따라서 제곱수는 $2^0, 2^2, \dots, 2^{26}$ 인 14 개, $3^0, 3^2, \dots, 3^8$ 인 5 개,
 $5^0, 5^2, \dots, 5^8$ 인 5개이므로 120^9 의 약수 중 제곱수는 $14 \times 5 \times 5 = 350$ 이다.

3. 어떤 자연수 x 의 약수의 개수를 $R(x)$ 라 하고, $R(40) \times R(75) = a$ 라 할 때, $R(a)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$40 = 2^3 \times 5$ 이므로 $R(40) = (3 + 1) \times (1 + 1) = 8$ 이다.

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 $R(75) = (1 + 1) \times (2 + 1) = 6$ 이다.

$$\therefore 8 \times 6 = 48$$

따라서 $48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $R(48) = (4 + 1) \times (1 + 1) = 10$ 이다.

4. 서로 다른 한 자리 소수 a, b, c 에 대하여 $a^l \times b^m \times c^n$ 으로 소인수분해되는 자연수 N 에 3 을 곱하였더니 약수의 개수가 2 배가 되었다. 이때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

a, b, c 중 3이 있는 경우

$a = 3$ 이라 하면

$$2(l+1)(m+1)(n+1) = (l+2)(m+1)(n+1)$$

$$2l+2 = l+2, l=0$$

l, m, n 은 1 이상인 자연수이므로 a, b, c 중에 3은 없다.

a, b, c 는 한 자리 소수 2, 3, 5, 7 중에서 3이 아니므로 2, 5, 7 이다.

$$\therefore 2 + 5 + 7 = 14$$

5. 두 자연수의 곱이 972 이고, 최대공약수가 9 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 36

해설

두 자연수를 A, B 라 하고 최소공배수를 L 이라 하면 $972 = 9 \times L$
이므로 $L = 108$

$$9) \begin{array}{r} A \quad B \\ a \quad b \end{array}$$

$$9 \times a \times b = 108$$

$$a \times b = 12 \text{ (단, } a, b \text{ 는 서로소)}$$

$A = 9 \times a, B = 9 \times b$ 이고 $A > B$ 라 하면

$$a = 12, b = 1 \text{ 또는 } a = 4, b = 3$$

$$(i) a = 12, b = 1 \text{ 일 때}$$

$$A - B = 9 \times 12 - 9 \times 1 = 99$$

$$(ii) a = 4, b = 3 \text{ 일 때}$$

$$A - B = 9 \times 4 - 9 \times 3 = 9$$

따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 27, 36 이다.

6. 다음 조건을 모두 만족하는 서로 다른 두 유리수 a, b 에 대하여 옳지 않은 것을 고르면?(정답 3개)

㉠ $a > 3, b < 3$

㉡ $|a| > |b|$

㉢ $a > -b$

㉣ $-a > b$

㉤ $-a - b < 0$

㉥ $a - b > 6$

㉦ $\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$

해설

$a > 3, b < 3, |a| > |b|$ 이므로, $b < 3 < a$ 이고 $|b| < 3$ 이다.

㉠ $a > -b$ b 의 절댓값이 3보다 작으므로 옳다.

㉡ $-a > b$ a 의 절댓값이 b 보다 크므로 옳지 않다.

㉢ $-a - b < 0$ a 의 절댓값이 b 보다 크므로 옳다.

㉣ $a - b > 6$ a 는 3보다 크고 b 는 3보다 작으므로 옳지 않다.

㉤ $\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$ b 의 절댓값이 더 작으므로 옳지 않다.

7. 두 정수 a, b 에 대하여 $|a| = 10$, $|b| = 13$ 이고 $a - b$ 의 최댓값을 M , $|a + b|$ 의 최솟값을 N 이라 할 때, $M + N$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$|a| = 10$ 이면 $a = \pm 10$, $|b| = 13$ 이면 $b = \pm 13$

$a - b$ 의 최댓값은 $10 - (-13) = 23 = M$

$|a + b|$ 의 최솟값은 $|10 + (-13)| = 3 = N$

$\therefore M + N = 23 + 3 = 26$

8. $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ 가 다음과 같을 때, $2A_{2002}$ 의 값을 구하여라.

$$A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}, A_3 = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \quad A_4 = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}}, \dots$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = 2, A_3 = \frac{1}{1 - A_2} = -1, A_4 = \frac{1}{1 - A_3} = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

3 개씩 반복된다.

따라서 $2002 = 3 \times 667 + 1$ 이므로 A_{2002} 는 A_1 와 같은 $\frac{1}{2}$ 이다.

9. 네 정수 a, b, c, d 가 아래의 조건을 만족시킬 때, 다음 식 중에서 항상 참인 것은?

㉠ $abd > 0$

㉡ $ac < 0$

㉢ $bd < 0$

① $a > 0$

② $b > 0$

③ $c > 0$

④ $d > 0$

⑤ 아무 것도 알 수 없다.

해설

㉠과 ㉢에서 $abd > 0$ 이고 $bd < 0$ 이므로 $a < 0$

따라서 ㉡. $ac < 0$ 에서 $c > 0$

그러므로 $a < 0, c > 0$ 임을 알 수 있지만 b, d 의부호는 알 수 없다.

10. $a \times b < 0$, $a - b > 0$ 인 두 정수 a , b 가 있다. a 의 절댓값은 b 의 절댓값의 2 배이고, 두 수의 합이 3 일 때, a 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 4

⑤ 6

해설

$a \times b < 0$, $a > b$ 이므로 $a > 0$, $b < 0$,

$a + b = 3$ 에서 부호가 다른 두 수의 합은

절댓값의 차에서 절댓값이 큰 수의 부호를 붙이므로 두 수의 절댓값의 차가 3,

a 가 b 보다 원점에서 2 배만큼 떨어져 있으므로 a 의 절댓값은 6, b 의 절댓값은 3,

$\therefore a = 6$, $b = -3$

11. 네 수 A, B, C, D 는 서로 다른 정수이다. 네 정수가 다음 조건을 모두 만족할 때, 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $C - B < 0$

㉡ $B + D = 0$

㉢ $B \times D < 0, A - D < 0$

㉤ A 는 B 보다 원점에 가까운 양수이다.

① $B \times C > 0$

② $A \times D < 0$

③ $A + B > 0$

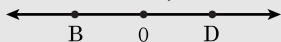
④ $A + B + C + D < 0$

⑤ $C < B < A < D$

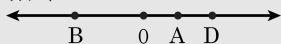
해설

㉡ 에 의하여 두 수 B 와 D 는 절댓값이 같고 부호가 서로 다른 수이므로 수직선 위에서 B 와 D 에 대응하는 점의 한 가운데 점이 원점이 된다.

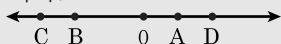
㉢, ㉤에 의하여 B 에 대응하는 점은 원점의 왼쪽, D 에 대응하는 점은 원점의 오른쪽에 있다. 그리고 A 에 대응하는 점은 원점의 오른쪽에 있고, D 에 대응하는 점보다 왼쪽에 있다.



㉠에 의하여 C 에 대응하는 점은 B 에 대응하는 점보다 왼쪽에 있다.



따라서, 수직선 위에는 왼쪽부터 C, B, A, D 에 대응하는 점 순서대로 놓이게 되므로, 가장 작은 수부터 차례로 나열하면 C, B, A, D 이다.



따라서 옳은 것은 ①, ④, ⑤이다.

12. 음의 정수 하나와 양의 정수 하나의 합은 7 이고, 두수의 절댓값의 합은 23 일 때, 두 수의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -120

해설

음의 정수를 a , 양의 정수를 b 라 두면,

$a + b = 7$, $|a| + |b| = 23$ 이다.

위 두 조건을 만족하는 a, b 의 값은 $a = -8$, $b = 15$ 이다.

$\therefore$ (두수의 곱) $= -120$

13. 방정식 $2|x-2| = \frac{2}{3}(12x+6) + x-2$ 의 해를 구하면?

① $\frac{1}{11}$

② $\frac{2}{11}$

③ $\frac{3}{11}$

④ $\frac{4}{11}$

⑤ $\frac{5}{11}$

해설

(i) $x < 2$ 일 때,

$$-2(x-2) = 8x+4+x-2$$

$$-2x-9x = -2$$

$$-11x = -2$$

$$x = \frac{2}{11}$$

$$x = \frac{2}{11} < 2 \text{ 이므로 조건에 적합}$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$2(x-2) = 8x+4+x-2$$

$$2x-9x = 6$$

$$-7x = 6$$

$$x = -\frac{6}{7}$$

$$x = -\frac{6}{7} < 2 \text{ 이므로 조건에 맞지 않는다.}$$

$$\therefore x = \frac{2}{11}$$

14. $5a - 2b = 3a + 2b$ 일 때, x 에 관한 일차방정식 $2px - p - x = \frac{1}{3}px + p$

의 해는 $x = \frac{\frac{3}{2}a + 3b}{2a - b}$ 이다. 이때, $4p^2 + 2p + \frac{3}{p}$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$$5a - 2b = 3a + 2b \text{ 에서}$$

$$2a = 4b$$

$$a = 2b$$

$$x = \frac{\frac{3}{2}a + 3b}{2a - b} \text{ 에 } a = 2b \text{ 를 대입하면}$$

$$x = \frac{3b + 3b}{4b - b}$$

$$= \frac{6b}{3b} = 2$$

$$2px - p - x = \frac{1}{3}px + p \text{ 에 } x = 2 \text{ 를 대입하면}$$

$$4p - p - 2 = \frac{2}{3}p + p$$

$$3p - \frac{5}{3}p = 2$$

$$\frac{4}{3}p = 2$$

$$p = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4p^2 + 2p + \frac{3}{p} &= 4 \times \frac{9}{4} + 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times \frac{2}{3} \\ &= 9 + 3 + 2 = 14 \end{aligned}$$

15. 다음 x 에 관한 방정식의 해가 $x = 4$ 일 때, a 의 값은?

$$|x - a| + \frac{1}{2}x = 6a$$

① $\frac{5}{7}$

② $\frac{6}{7}$

③ 1

④ $\frac{8}{7}$

⑤ $\frac{9}{7}$

해설

주어진 방정식에 $x = 4$ 을 대입하면

$$|4 - a| + 2 = 6a$$

(i) $a < 4$ 일 때

$$4 - a > 0 \text{ 이므로}$$

$$4 - a + 2 = 6a$$

$$-7a = -6, a = \frac{6}{7}$$

(ii) $a \geq 4$ 일 때

$$4 - a \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$-4 + a + 2 = 6a$$

$$5a = -2, a = -\frac{2}{5}$$

$$a = -\frac{2}{5} < 4 \text{ 이므로 조건에 맞지 않는다.}$$

i) ii) 로 부터 $a = \frac{6}{7}$

16. 15% 의 소금물 120 g 에서 얼마만큼의 소금물을 퍼내서 버리고, 같은 양만큼의 물을 채웠다. 여기에 10% 의 소금물 180 g 을 섞었더니 10% 의 소금물이 되었다. 더 부은 물의 양을 구하면?

- ① 40 g ② 45 g ③ 50 g ④ 55 g ⑤ 60 g

해설

퍼낸 소금물의 양을 x g 이라 하면

$$\frac{15}{100}(120 - x) + \frac{10}{100} \times 180 = \frac{10}{100} \times 300$$

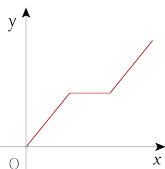
$$3x = 120$$

$$\therefore x = 40$$

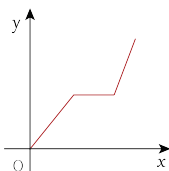
따라서 퍼낸 소금물의 양만큼 물을 더 채워 넣으므로 더 부은 물의 양은 40 g 이다.

17. 유미는 서연이와 영화를 보기 위해 집을 나섰는데 일정한 속력으로 걸어가다가 공원에 앉아 잠시 쉬었다. 약속 시간에 늦을 것 같아 공원부터 영화관까지는 일정한 속력으로 뛰었다. 유미가 집에서 출발한 지 x 분 후의 집으로부터 떨어진 거리를 $y\text{km}$ 라고 할 때, x 와 y 사이의 관계를 나타낸 그래프로 알맞은 것은?

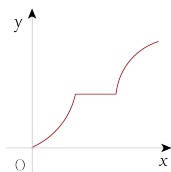
①



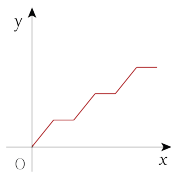
②



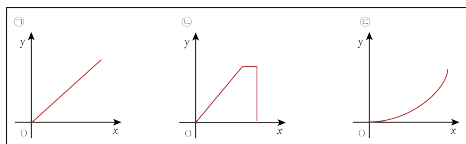
③



④



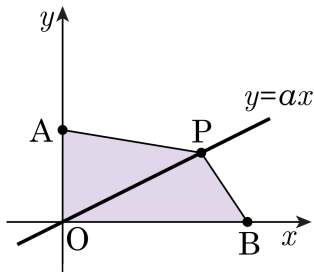
⑤



해설

일정한 속력으로 걸어갈 때는 y 의 값이 일정하게 증가해야 하고, 중간에 쉬는 동안은 y 의 값의 변화가 없어야 한다. 그러다 다시 일정한 속력으로 뛸 때는 걸어갈 때보다 y 의 값이 급격히 증가해야 한다.

18. 두 점 $B(4,0)$, $A(0,2)$ 가 있다. 다음 그림과 같이 제 1사분면 위의 점 P 를 지나는 직선 $y = ax$ 가 사각형 $OBPA$ 의 넓이를 이등분 할 때, a 의 값은?



① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 4

해설

P 점의 좌표를 (x,y) 라 하면

(삼각형 BPO의 넓이) = (삼각형 POA의 넓이)이므로

$$4 \times y \times \frac{1}{2} = 2 \times x \times \frac{1}{2}$$

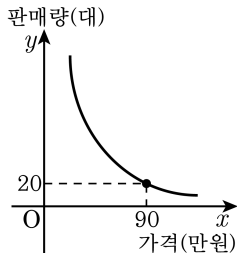
$$x = 2y$$

$P(2y,y)$ 를 $y = ax$ 에 대입하면

$$y = a \times 2y, 2a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

19. 다음 그림은 어느 회사의 한 달 평균 A 상품 판매량과 가격 사이의 관계를 나타낸 그래프이다. 현재 이 상품의 가격이 90만 원일 때, 판매량을 20% 증가시키려면 가격을 얼마로 해야 하는지 구하여라.



▶ 답 :

만원

▷ 정답 : 75만원

해설

판매량은 가격에 반비례한다.

가격을 x 만 원, 판매량을 y 대라 하면

$$y = \frac{a}{x} \text{ 에 } x = 90, y = 20 \text{ 을 대입하면 } 20 = \frac{a}{90}, a = 1800$$

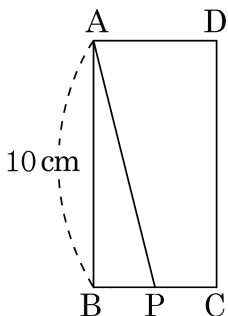
$$\text{즉, } y = \frac{1800}{x} (x > 0)$$

판매량을 20% 증가시키려면 $20 \times 1.2 = 24$ (대)

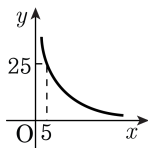
$$y = \frac{1800}{x} \text{ 에 } y = 24 \text{ 를 대입하면}$$

$$24 = \frac{1800}{x} \quad \therefore x = 75$$

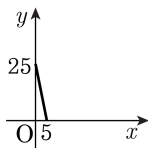
20. 다음 그림의 사각형 ABCD는 세로의 길이가 10 cm, 가로 길이가 5 cm인 직사각형이다. 점 P가 B에서 출발하여 변 BC 위에 C를 향하여 움직이며, P가 x cm 나아갔을 때의 삼각형 ABP의 넓이를 y cm²라 하자. x, y 사이의 관계식에 대한 그래프는?



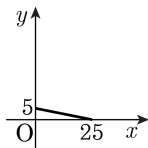
①



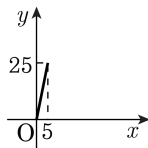
②



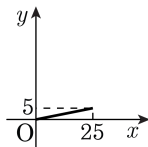
③



④



⑤



해설

$$\triangle ABP \text{의 넓이} : y = \frac{1}{2} \times x \times 10 = 5x$$

x 는 점 B를 출발해서 C까지 움직이므로 $\{0 \leq x \leq 5\}$ 이다.
따라서 넓이는 $\{0 \leq y \leq 25\}$ 이다.