

1. 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 세 근으로 하는 x 의 삼차방정식은 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -3$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2$$

$$\alpha\beta\gamma = 1$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -3$$

$$-c = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

$$\therefore c = -1$$

$$\therefore a + b + c = -2$$

2. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.

주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면

$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

3. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$

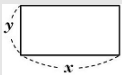
4. 가로,의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로,의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$$2(x + y) = 34 \text{ 즉, } x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

5. 연립방정식 $\begin{cases} xy + x + y = -5 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대해

$x+y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ -1

④ 2

⑤ -2

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면

①은 $u + v = -5 \cdots \cdots \textcircled{3}$

②는 $u^2 - v = 7 \cdots \cdots \textcircled{4}$

③, ④에서 v 를 소거하면

$$u^2 + u - 2 = 0$$

$$\therefore (u - 1)(u + 2) = 0$$

$u = 1$ 일 때, $v = -6$ 이므로

$$t^2 - t - 6 = 0 \text{ 에서 } t = -2, 3$$

$u = -2$ 일 때, $v = -3$ 이므로

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \text{ 에서 } t = 1, -3$$

따라서, 구하는 근은

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore M = 1, m = -2 \therefore M + m = -1$$