1. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c는 실수이다)

보기

㉠ $a > b$이면 $ac > bc$

㉡ $a > b$이면 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$

㉢ $a > b$이면 $\frac{c^2}{a} > \frac{c^2}{b}$

㉣ $a > b$이면 $a^2 > b^2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠의 반례 : $a > b$이고 $c = 0$인 모든 실수 (거짓)

㉡. $a > b$이면 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$ (참)

㉢의 반례 : $a > b$이고 $c = 0$인 모든 실수 (거짓)

㉣. $a > b$이고 $|a| < |b|$인 모든 실수 (거짓)

2. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3} < \dfrac{-x-6}{4} \\ 2(3-x)+8 \geq 5x-7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x < -2$

해설

(i) $\dfrac{2x+1}{3} < \dfrac{-x-6}{4}$ 에서 $x < -2$

(ii) $2(3-x)+8 \geq 5x-7$ 에서 $x \leq 3$

$\therefore \ x < -2$

3. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -1

해설

$x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

a의 최솟값은 -1

4. 부등식 $-x < x^2 < 2x+1$의 해를 구하면?

① $x < -1$ 또는 $x > 0$

② $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$

③ $0 < x < 1+\sqrt{2}$

④ $-1 < x < 0$

⑤ $x < -\sqrt{2}$
또는 $x > 1+\sqrt{2}$

해설

$-x < x^2 < 2x+1$

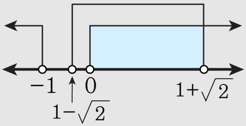
$$\begin{cases} -x < x^2 & \cdots ㉠ \\ x^2 < 2x+1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $0 < x^2 + x$, $x(x+1) > 0$

$\therefore x < -1$ 또는 $x > 0$

㉡ $x^2 - 2x - 1 < 0$,

$\therefore 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$



두 부등식의 공통부분은

$\therefore 0 < x < 1+\sqrt{2}$

5. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a<x<b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$

$x-1+x>x+1$ $\therefore\ x>2$ $\cdots\cdots$①

한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$ $\cdots\cdots$②

①과 ②에서 $2<x<4$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

따라서 $a+b=6$

6. 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m<k\le n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ -15 ④ -12 ⑤ -10

해설

ⅰ) $D/4=4-k\ge 0,\ k\le 4$

ⅱ) $f(3)>0,\ k>3$ 따라서,

ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3<k\le 4$

$m=3,\ n=4$ 이므로 $mn=12$

7. $\mathrm{A}(-1,-1), \mathrm{B}(5,-2), \mathrm{C}(5,5)$를 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC의 중점 M과 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 차례로 구하면?

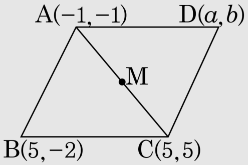
① $(2,2), (-1,6)$　② $(1,1), (-3,4)$　③ $(1,2), (-3,4)$

④ $(3,3), (-1,6)$　⑤ $(1,1), (2,2)$

해설

$$\mathrm{M} = \left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-1+5}{2}\right) = (2,\ 2)$$

$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점인 M과 같으므로



$\mathrm{D}(a,\ b)$라고 하면

$$(2,\ 2) = \left(\frac{a+5}{2},\ \frac{b-2}{2}\right)$$

$\therefore\ a=-1,\ b=6$

$\therefore \mathrm{D}(-1,\ 6)$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$ 중 $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$ 이라 할 때, $M + 2m$ 의 값을 구하면?

① -9 ② -13 ③ -18 ④ -22 ⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠

$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times (-2) +$ ㉡을 하면

$-10 < -2x - 10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢

$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣

㉢ $+$ ㉣ $= -12 < -3 < 1$

그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$

그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면

$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$

따라서, $x + y$의 최댓값은$-3 + 1 = -2$이고,

최솟값은$-11 + 3 = -8$이다.

$\therefore M = -2,\ m = -8 \ \therefore\ M + 2m = -18$

9. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

> [풀이]
> $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=$ (㉠) 이 된다.
> $-1<2x+y<1$ 를 풀 때 y 대신 $y=$ (㉠) 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다.
> 부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.
> x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y=$ (㉢) 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면

$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$

정수인 x 는 -1 이 된다.
x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

10. 연립부등식 $\begin{cases} 5x+7 \le 2x-2 \\ 2ax-2b \ge bx+4a \end{cases}$ 의 해가 $x \le -3$일 때, $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하면?

① 3 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{3}{14}$ ④ $\dfrac{1}{10}$ ⑤ 5

해설

$5x+7 \le 2x-2$, $3x \le -9$, $x \le -3$ $\cdots$ ㉠

$2ax-2b \ge bx+4a$, $(2a-b)x \ge 4a+2b$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통되는 부분이 $x \le -3$ 이 되기 위해서는 ㉡에서 $2a-b<0$ 이다.

이때, $x \le \dfrac{4a+2b}{2a-b}$ 이면서 $\dfrac{4a+2b}{2a-b}=-3$ 이어야 한다.

$4a+2b=-6a+3b$, $10a=b$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{10}$

11. 부등식 $|2x+2|<a+3$를 만족하는 실수 x값이 존재하기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a \le -4$　② $a > -4$　③ $a < -3$
④ $a > -3$　⑤ $a \le -1$

해설

i) $x \ge -1$일 때,

$2x+2<a+3,\ 2x<a+1 \quad \therefore x<\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

$x \ge -1,\ x<\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}>-1,\ a>-3$

ii) $x<-1$일 때,

$-2x-2<a+3,\ -2x<a+5$

$x<-1,\ x>-\frac{1}{2}a-\frac{5}{2}$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$-\frac{1}{2}a-\frac{5}{2}<-1 \quad \therefore a>-3$

i), ii)에 의하여 $a>-3$

12. 부등식 $x^2+ax+a+3 \le 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$ ② $2 < a < 5$ ③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$ ⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2+ax+a+3 \le 0$의 해가

1개 존재하기 위해서는

$x^2+ax+a+3=0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore D &= a^2-4(a+3)\\ &= a^2-4a-12\\ &= (a-6)(a+2)=0\end{aligned}$$

$\therefore a=6 \ (\because a>0)$

13. 부등식 $|x^2-1|+3x<3$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.

(ⅰ) $x^2-1\geq 0$,
즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,
$|x^2-1|=x^2-1$이므로 주어진 부등식은
$x^2-1+3x<3,\ x^2+3x-4<0$
$(x+4)(x-1)<0$
$\therefore -4<x<1$

이 때 조건에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이므로
이를 만족하는 x값의 범위는 $-4\leq x\leq -1$

(ⅱ) $x^2-1<0$,
즉 $-1<x<1$일 때,
$|x^2-1|=-x^2+1$이므로 주어진 부등식은
$-x^2+1+3x<3,\ x^2-3x+2>0$
$(x-1)(x-2)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

이 때 조건에서 $-1<x<1$이므로
이를 만족하는 x의 값의 범위는 $-1<x<1$
(ⅰ), (ⅱ)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4<x<1$
따라서 $\alpha=-4,\ \beta=1,\ \alpha+\beta=-3$

14. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$ ② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$ ④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta),\ a > 0$

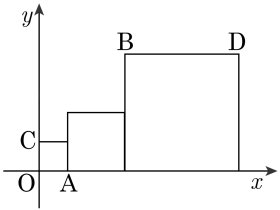
$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c < 0$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c < 0$ 이고 $\frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

15. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $C(0, 4)$, 점 $D(21, 12)$일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11　　② 13　　③ 15

④ 17　　⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로

점 $A(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로

점 $B(21-12,\ 12)$

즉, $B(9,\ 12)$

$\therefore\ \overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

16. x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

다음 그림에서

$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$ $+$

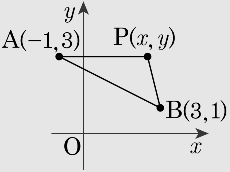
$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 의미 하므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{AB}}$

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$



17. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1,\ 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1\ ,6\ )$, $(a\ ,b\ )$,$(3\ ,4\ )$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로

$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore\ a+b=3$

18. 연립방정식 $2x + ay = 6$, $-3ax + 2y = -2$ 에서 $x < 0$, $y > 0$ 이기 위한 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} 2x + ay = 6 & \cdots ㉠ \\ -3ax + 2y = -2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

y 를 소거하기 위하여 ㉠ $\times 2 -$ ㉡ $\times a$ 을 하면

$(4 + 3a^2)x = 12 + 2a$ 에서

$x = \dfrac{12 + 2a}{4 + 3a^2} \cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면,

$2\left(\dfrac{12 + 2a}{4 + 3a^2}\right) + ay = 6$, $y = \dfrac{18a - 4}{4 + 3a^2}$

$x < 0$, $y > 0$ 이므로

$\dfrac{12 + 2a}{4 + 3a^2} < 0$, $\dfrac{18a - 4}{4 + 3a^2} > 0$

에서 $4 + 3a^2$ 는 모든 자연수 a 에 대하여 0 보다 크므로

$2a + 12 < 0$, $a < -6$

$18a - 4 > 0$, $a > \dfrac{2}{9}$

따라서 $a > \dfrac{2}{9}$ 를 만족하는 자연수 a 의 최솟값은 1 이다.

19. 세 자리 자연수 abc 가 $b > 3c + a$, $a > 2$ 를 만족할 때, 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 890

해설

세 자리 자연수 abc 에서
a 는 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고, b, c 는 0 과 같거나 크고 10 보다 작은 자연수이다.
$b > 3c + a$ 이므로,
$3c + a < b < 10$ 이 되고 $3c + a < 10$
$a > 2$ 이므로 $c \leq 2$
1) $c = 2$ 일 때
$6 + a < b < 10$, $a > 2$ 를 만족하는 b 는 존재하지 않는다.
2) $c = 1$ 일 때
$3 + a < b < 10$, $a > 2$ 를 만족하는 $(a,\ b)$ 순서쌍을 구해보면,
$(3,\ 7), (3,\ 8), (3,\ 9), (4,\ 8), (4,\ 9), (5,\ 9)$
3) $c = 0$ 일 때
$a < b < 10$, $a > 2$ 를 만족하는 $(a,\ b)$ 순서쌍을 구해보면,
$(3,\ 4), (3,\ 5), (3,\ 6), (3,\ 7), (3,\ 8), (3,\ 9), (4,\ 5), (4,\ 6), (4,\ 7), (4,\ 8), (4,\ 9), (5,\ 6), (5,\ 7), (5,\ 8), (5,\ 9), (6,\ 7), (6,\ 8), (6,\ 9), (7,\ 8), (7,\ 9), (8,\ 9)$
이 중 가장 큰 수는 $a = 8,\ b = 9,\ c = 0$ 일 때이므로 구하는 세 자리의 자연수는 890 이다.

20. 농도가 5 % 인 소금물 200g 에 소금을 넣고, 넣어 준 소금의 양만큼 물을 증발시켜서 농도가 7 % 이상이 되게 하려고 한다. 이 때, 더 넣어준 소금의 양은 최소 몇 g 인지 구하여라.

▶ 답 : g

▷ 정답 : 4 g

해설

농도가 5 % 인 소금물 200g 에 들어있는 소금의 양은

$$200 \times \frac{5}{100} = 10\,(\mathrm{g})$$

더 넣어준 소금의 양을 xg 이라 하면

$$\frac{10 + x}{200} \times 100 \geq 7$$

$\therefore x \geq 4$

따라서 더 넣어준 소금의 양은 최소 4g 이다.

21. 6 시에 야구경기가 시작되는 야구장에 야구경기를 보기 위해 사람들이 찾아오고 있다. 5 시부터 표를 팔기 시작하는 데 표 발매 시작 전에 이미 1800 명의 사람들이 줄을 서 있다. 이후에도 계속 매분 20 명이 경기시작 전까지 찾아온다. 야구장에서는 10 곳의 발권창구를 마련하고 있고 1 분당 3 명에게 표를 판매하고 있고 무인발권기 10 대를 운영하고 있다. 야구장을 찾은 관중의 수가 3000 명일 경우 경기 시작 전에 모두에게 표가 발매될 수 있다고 한다. 주말을 맞아 야구장을 찾는 관중의 수가 1000 명 이상 늘어날 것으로 예상된다고 할 때 경기시작 전에 모두 입장이 가능하려면 무인발권기를 최소 몇 대 더 설치해야 하는지 구하여라. (단, 무인발권기 한 대당 발매하는 표의 수는 모두 같다.)

▶ 답 : ______ 대

▷ 정답 : 9대

해설

전체 관중수가 $1800 + 20 \times 60$분 $= 3000$명 이므로 무인발권기 한 대가 1 분당 발매하는 표의 수를 x장이라 하면

10×60분 $\times 3$명 $+ 10 \times 60$분 $\times x = 3000$

$\therefore x = 2$

추가로 설치할 무인발권기의 수를 y대라 하면

$y \times 2 \times 60 \geq 1000$

$\therefore y \geq 8.3$

따라서 최소 9 대의 무인발권기를 추가로 설치해야 한다.

22. 수직선 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $m : n\ (m > n)$ 으로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D 라고 할 때, 다음 식이 성립한다. (　　　　)안에 알맞은 값을 구하여라.

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{(\quad)}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

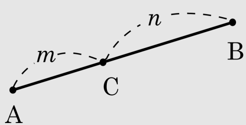
해설

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}}$

$= (m+n) : m$

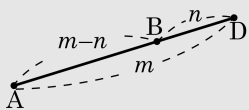
따라서 $\overline{\mathrm{AC}}$

$= \dfrac{m}{m+n}\overline{\mathrm{AB}}$



$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AD}}$

$= (m-n) : m$



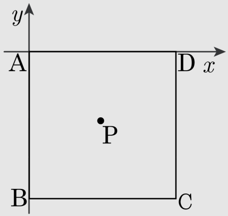
따라서 $\overline{\mathrm{AD}} = \dfrac{m}{m-n}\overline{\mathrm{AB}}$

$\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \dfrac{m+n}{m}\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}} + \dfrac{m-n}{m}\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}} =$
$\dfrac{2}{\overline{\mathrm{AB}}}$

23. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P가 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

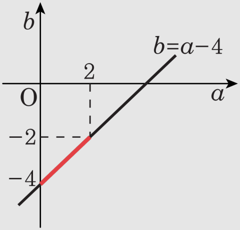
해설



A(0, 0), B(0, −2), D(2, 0), P(a, b)라고하면 $2 \cdot \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$이므로

$$2 \cdot (a^2 + b^2)$$
$$= a^2 + (b+2)^2 + (a-2)^2 + b^2$$
$$0 = b - a + 4$$
$$\therefore \ P(a,\ b) = (a,\ a-4)$$

점 P의 자취는 $b = a - 4$ $(0 < a < 2)$와 같으므로



구하는 길이는 두 점 (0, −4)아 (2, −2) 사이의 거리와 같다.

$$\therefore \ \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$$

24. 정점 A(1, 4)와 직선 $x+2y-1=0$ 위의 동점 P를 연결하는 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 자취의 방정식을 구하면?

① $x+2y-5=0$ ② $2x+3y-10=0$

③ $3x+6y-11=0$ ④ $3x-6y-10=0$

⑤ $2x+5y-9=0$

해설

P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-1=0 \cdots\cdots$ ①

$\overline{\mathrm{AP}}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

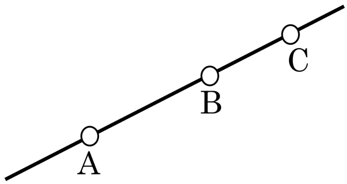
$$x=\frac{2a+1}{3},\ y=\frac{2b+4}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{3x-1}{2},\ b=\frac{3y-4}{2} \cdots\cdots ②$$

②을 ①에 대입하면 $\dfrac{3x-1}{2}+2\times\dfrac{3y-4}{2}-1=0$

$\therefore\ 3x+6y-11=0$

25. 아래 그림과 같이 일직선 위의 세 점 A, B, C 에 소매상이 있고, 어느 한 지점에 도매상을 세우려고 한다. 운반 비용은 도매상에서 각 소매상에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반 비용을 최소로 하는 도매상의 위치는?(단, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$)



① $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점

② $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점

③ $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점

④ $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점

⑤ $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 3 : 2 으로 내분하는 점

해설

소매상의 위치를 각각

$\mathrm{A}(-2a,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 0),\ \mathrm{C}(a,\ 0)$ (단, $a > 0$)이라 하고

도매상의 위치를 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$

$= (x+2a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

$= 3x^2 + 2ax + 3y^2 + 5a^2$

$= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + 3y^2 + \frac{14}{3}a^2$

따라서 $x = -\frac{1}{3}a,\ y = 0$ 일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소이고

운반 비용도 최소이다.

이 때, 점 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{a},\ 0\right)$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점이다.