1. 등식 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=1-\dfrac{i}{5}$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $16xy$ 의 값은?

① 97　② 98　③ 99　④ 100　⑤ 101

해설

$$(\text{좌변})=\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}$$

$$=\frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$\dfrac{(x+y)+2(y-x)i}{5}$ 이므로

$$\frac{x+y}{5}+\frac{2(y-x)i}{5}=1-\frac{i}{5}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{5}=1\ ,\ \frac{2(y-x)}{5}=-\frac{1}{5}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{11}{4},\ y=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ 16xy=16\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{9}{4}=99$$

2. $(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}i$ ② $4\sqrt{3}i$ ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

$$(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$$
$$=(4+4\sqrt{3}i+3i^2)+(4-4\sqrt{3}i+3i^2)$$
$$=1+4\sqrt{3}i+1-4\sqrt{3}i=2$$

3. 방정식 $|x-1|=5$ 의 모든 해의 합은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$|x-1|=5$ 에서 $x-1=\pm 5$

(i) $x-1=5$ 일 때, $x=6$

(ii) $x-1=-5$ 일 때, $x=-4$

따라서 방정식의 두 실근의 합은

$6+(-4)=2$

4. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + k$ 의 최솟값과 이차함수 $y = -2x^2 + 4x - 2k + 2$ 의 최댓값이 일치할 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + k = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 8 + k$

최솟값은 $-8 + k$

$y = -2x^2 + 4x - 2k + 2$

$= -2(x-1)^2 + 4 - 2k$

최댓값은 $4 - 2k$

$-8 + k = 4 - 2k$

$\therefore\ k = 4$

5. 연립부등식 $-2 < 3x + 4 \le 11$ 를 만족하는 정수를 모두 구하면?

① $-1,\ 0,\ 1$　② $0,\ 1,\ 2$　③ $-1,\ 0,\ 1,\ 2$

④ $-2,\ -1,\ 0,\ 1$　⑤ $0,\ 1,\ 2,\ 3$

해설

$$\begin{cases} -2 < 3x + 4 \\ 3x + 4 \le 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \le \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

따라서 $-2 < x \le \dfrac{7}{3}$ 을 만족하는 정수는 : $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 이다.

6. 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$ 의 값은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 7 ④ 20 ⑤ -12

해설

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{60}}{3}$$

$$\therefore \quad (\alpha-\beta)^2=|\alpha-\beta|^2=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$$

7. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$
② $x = \pm 2,\quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$
③ $x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$
④ $x = \pm 2,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$
⑤ $x = \pm 2,\quad x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow\quad (x-1)(x+1)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

8. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

9. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$또는 $x=r,\ y=s$이다. $p+q+r+s$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

10. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k^2x+1 > 2kx+k$가 성립할 때, k값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$k^2x+1 > 2kx+k$에서

$(k^2-2k)x > k-1$,

$k(k-2)x > k-1$

해가 모든 실수이므로

$k(k-2)=0,\ k-1<0$ 이어야 한다.

$\therefore\ k=0$

11. 부등식 $|x-3| \geq 2$의 해로 다음 중 옳은 것은?

① $1 \leq x \leq 5$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$

③ $-1 \leq x \leq 5$

④ $x \leq -1$ 또는 $x \geq 5$

⑤ $-5 \leq x \leq -1$

해설

$|x-3| \geq 2$에서 $x-3 \geq 2$ 또는 $-(x-3) \geq 2$ $\therefore$ $x \geq 5$ 또는 $x \leq 1$

12. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i\ ,$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식})&=(-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\&=\{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\&=-1-1-1=-3\end{aligned}$$

13. $\alpha = 1 - i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $-2i$ ② 2 ③ $2i$

④ 4 ⑤ $2+3i$

해설

$\alpha = 1 - i$, $\overline{\alpha} = 1 + i$

$\alpha + \overline{\alpha} = 2, \alpha\overline{\alpha} = 2$

$$\begin{aligned} \alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha} &= \alpha\overline{\alpha}(\alpha + \overline{\alpha}) \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

14. $a<0,\ b<0$ 일 때 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

해설

$a<0,\ b<0$ 이므로,

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-a}i\sqrt{-b}i$

$=\sqrt{-a}\sqrt{-b}i^2$

$=-\sqrt{-a}\sqrt{-b}$

$=-\sqrt{ab}$

$(\because -a>0,\ -b>0)$

따라서, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\cdot(ab)}$

$=\sqrt{a^2}\sqrt{ab}$

$=|a|\sqrt{ab}$

$=-a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a}}=-\dfrac{b}{\sqrt{a}}=-\dfrac{b\sqrt{a}}{|a|}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근을 $\alpha+1$, $\beta+1$이라 한다. 이 때, 상수 a, b의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b\cdots\cdots$㉠

또, $x^2-bx+a=0$ 의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b,\ (\alpha+1)(\beta+1)=a$

즉, $\alpha+\beta+2=b,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=a\cdots\cdots$㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-a+2=b,\ b-a+1=a$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore ab=1$

16. 이차함수 $y = ax^2 - 4x - c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최댓값 1 을 가진다. 이때, ac 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = ax^2 - 4x + c$ 는 $x = 2$ 일 때,
최솟값 -1 이므로
$y = a(x-2)^2 + 1 = ax^2 - 4ax + 4a + 1$
$-4a = -4$, $4a + 1 = -c$ 이므로
$a = 1$, $4 + 1 = -c$, $c = -5$
$\therefore ac = -5$

17. 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 20 인 직사각형의 넓이를 y라고 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

가로의 길이를 x, 세로의 길이를 $20 - x$라고 하자.

$$
\begin{aligned}
y &= x \times (20 - x) \\
&= -x^2 + 20x \\
&= -(x^2 - 20x) \\
&= -(x - 10)^2 + 100
\end{aligned}
$$

따라서 100이 최댓값이다.

18. $-2 \leq x \leq -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \leq A \leq q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 12

해설

$-2 \leq x \leq -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \leq -x \leq 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \leq 2-x \leq 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{2-x} \leq \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \leq \dfrac{12}{2-x} \leq 4$

$\therefore\ p = 3, q = 4$

$\therefore\ pq = 12$

19. 부등식 $\begin{cases} x - 11 \geq 2x - 4 \\ a - x < 1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, a 가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

① -3　② -4　③ -5　④ -6　⑤ -7

해설

$$\begin{cases} x - 11 \geq 2x - 4 \\ a - x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ x > a - 1 \end{cases}$$

의 해가 없으므로 $a - 1 \geq -7$

$\therefore\ a \geq -6$

따라서 a 의 가장 작은 수는 -6 이다.

20. 지수는 이번 기말고사에 국어, 영어, 과학, 수학 4 과목을 시험을 치루었다. 지금까지의 국어, 영어, 과학 성적이 각각 88 점, 79 점, 97 점일 때, 수학성적까지의 평균이 88 점 이상 91 점 이하가 되게 하려면 수학시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는가? (단, 수학시험은 100 점 만점이다.)

▶ **답 :** ______ 점

▷ **정답 :** 88 점

해설

$$88 \le \frac{88+79+97+x}{4} \le 91$$

$$88 \times 4 \le 88+79+97+x \le 91 \times 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 352 \le 264 + x \\ 264 + x \le 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x \le 264 - 352 \\ 264 + x \le 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 88 \\ x \le 100 \end{cases}$$

$$\therefore \; 88 \le x \le 100$$

21. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\qquad\quad =(b-a)\omega+(12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0\ (\because\ \omega$는 허수$)$

$\therefore\ a=6,\ b=9$

22. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 10　⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20,$

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a는 5

23. 두 함수 $f(x) = |x-2|-5$, $g(x) = x^2+6x+8$ 에 대하여 $0 \le x \le 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$f(x) = |x-2|-5 = t$ 로 놓으면

$y = g(f(x)) = g(t) = t^2+6t+8 = (t+3)^2-1$

그런데 $0 \le x \le 5$ 에서 $-5 \le t \le -2$ 이므로

y 의 값은 $t=-5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,

$t=-3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.

$\therefore M=3,\ m=-1$

$\therefore M+m=2$

24. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x + 1.5y + 2z = 40 \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \cdots$ ㉡
$(x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1)$라고 하면
㉠ $\times 2 -$ ㉡ $\times 3 = -x + z = -10$,
$x = z + 10,\ z \geq 1$이므로
$x = z + 10 \geq 11$
이 때 $y = 18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

25. 어느 학교 학생들이 운동장에서 야영을 하기 위해 텐트를 설치하였다. 한 텐트에 3 명씩 자면 12명이 남고, 5 명씩 자면 텐트가 10개가 남는다고 할 때, 텐트의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▶ 답 : ______ 개

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 31 개

▷ 정답 : 32 개

▷ 정답 : 33 개

해설

텐트 수를 x개, 학생 수를 $(3x+12)$ 명이라 하면

$5(x-11)+1 \le 3x+12 \le 5(x-11)+5$

$5(x-11)+1 \le 3x+12$에서

$5x-55+1 \le 3x+12$,

$2x \le 66$

$\therefore\ x \le 33$

$3x+12 \le 5(x-11)+5$에서

$3x+12 \le 5x-55+5$,

$2x \ge 62$

$\therefore\ x \ge 31$

$\therefore 31 \le x \le 33$