

1. 세 점 $A(0, a)$, $B(b, 2)$, $C(-1, -b)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G 의 좌표가 $(a-4, 1)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -9

② -5

③ 0

④ 9

⑤ 5

해설

$$\frac{0 + b + (-1)}{3} = a - 4, \quad \frac{a + 2 + (-b)}{3} = 1 \text{에서}$$

$$b - 1 = 3a - 12, \text{ 즉 } 3a - b = 11$$

$$a - b + 2 = 3, \text{ 즉 } a - b = 1$$

이 두 식을 연립하여 풀면, $a = 5$, $b = 4$

따라서 $a + b = 5 + 4 = 9$

2. $2x + (a + 3)y - 1 = 0$, $(a - 2)x + ay + 2 = 0$ 에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 (x, y) 가 하나도 없도록 하는 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

두 직선 $2x + (a + 3)y - 1 = 0$,
 $(a - 2)x + ay + 2 = 0$ 이 평행해야 하므로

$$\frac{2}{a - 2} = \frac{a + 3}{a} \neq \frac{-1}{2}$$

$$(a - 2)(a + 3) = 2a, (a + 2)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 $\frac{a + 3}{a} \neq \frac{-1}{2}$ 에서 $a \neq -2$ 이므로

구하는 a 의 값은 3이다.

3. 직선 $l: x + y = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 직선을 m 이라고 할 때, 두 직선 l, m 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{11}{2}$

② 6

③ $\frac{13}{2}$

④ 7

⑤ $\frac{15}{2}$

해설

직선 $l: x + y = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한

직선의 방정식은 $(x - 2) + (y - 1) = 1$

$$\therefore m: x + y = 4$$

따라서, 두 직선 l, m 과 x 축 및 y 축으로

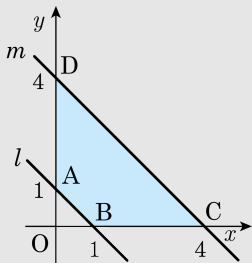
둘러싸인 도형은 다음 그림의 사각형 ABCD 이므로 그 넓이는 삼각형 OCD 의 넓이에서

삼각형 OBA 의 넓이를 뺀 것과 같다.

$$\therefore \square ABCD = \triangle OCD - \triangle OBA$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \frac{15}{2}$$



4. 직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1, 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 직선의 방정식은 $5y + 12x + k = 0$

즉, $12x + 5y + k = 0$

이 직선과 점 $(1, 1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + k|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2$$

$$\frac{|17 + k|}{13} = 2$$

$$|k + 17| = 26$$

$$k + 17 = \pm 26$$

$$\therefore k = 9 \text{ 또는 } k = -43$$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$$9 + (-43) = -34$$

5. 두 점 $A(2, 3)$, $B(0, -1)$ 를 이은 선분 AB , 또는 그 연장선 위에 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 인 점 C 는 두 개가 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$

② 4

③ $2\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{6}$

⑤ 5

해설

$\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 만족시키는 C 는 $\overline{AB}$ 의 1 : 1 내분점이거나 3 : 1 외분점이다.

i) 1 : 1 내분점은 $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (1, 1)$

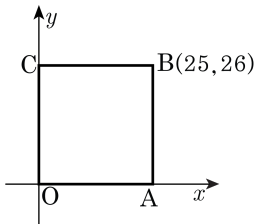
ii) 3 : 1 외분점은

$$\left(\frac{3 \times 0 - 1 \times 2}{3 - 1}, \frac{3 \times (-1) - 1 \times 3}{3 - 1}\right) = (-1, -3)$$

i), ii) 사이 거리는

$$\sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$$

6. 좌표평면 위에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다.
 직선 $y = \frac{3}{8}x + 1$ 은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$y = \frac{3}{8}x + 1$ 에서 x 가 8의 배수이면 y 도 정수가 된다.

$0 < x < 25$, $0 < y < 26$ 에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

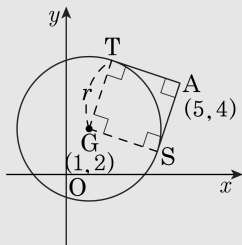
$(8, 4)$, $(16, 7)$, $(24, 10)$ 으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

7. 좌표평면 위에 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(5, 4)가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

A 에서 그은 접선이 서로 수직이면 원의 중심 G, 점점 S, T, 점 A 로 이루어지는 사각형 GSAT 는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다.



$$\therefore r = \frac{\overline{GA}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{10}$$

8. 좌표평면 위의 점 $P(3, 5)$ 를 지나고 기울기가 정수인 직선 중 x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

점 $P(3, 5)$ 를 지나고 기울기가 $m(m$ 은 정수)인 직선의 방정식은

$$y - 5 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$$

①의 x 절편은 $-5 = m(x - 3)$

$$\therefore x = 3 - \frac{5}{m}$$

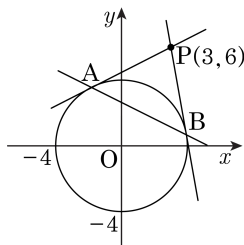
①의 y 절편은 $y - 5 = -3m \therefore y = 5 - 3m$

이 때, 정수 m 에 대하여 x 절편과 y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값이 5 의 약수(음수 포함)이어야 한다.

$$\therefore m = 1, 5, -1, -5$$

따라서, x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선은 4 개이다

9. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 외부에 있는 점 P(3, 6) 에서 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 직선 AB 의 방정식은?



① $3x + 6y - 16 = 0$

② $3x - 6y + 16 = 0$

③ $3x + 6y - 14 = 0$

④ $3x - 6y + 14 = 0$

⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

다음 그림에서 $\overline{PO} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 이고, $\triangle PAO$ 가 직각삼각형 이므로,

$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 4^2} = \sqrt{29}$$

이 때, 점 P를 중심으로 하고,

선분 PA 를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$$(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 29 \text{ 이므로,}$$

선분 AB 는 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과

새로운 원 $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 29$ 의 공통현이다.

따라서 직선 AB 의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 16) - \{(x - 3)^2 + (y - 6)^2 - 29\} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 - y^2 + 12y - 36 + 29 = 0$$

$$6x + 12y - 32 = 0$$

$$\therefore 3x + 6y - 16 = 0$$

