

1. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

2. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$ 가 항상 성립하도록 a, b 값을 정할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $0 = a - b \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면, $0 = -2 - a - b \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $a = b = -1$

$\therefore a + b = -2$

3. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는?

① $Q(3) + 3$

② $Q(3) + 4$

③ $2Q(3) + 3$

④ $2Q(3) + 4$

⑤ $Q(3)$

해설

주어진 조건에서 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ 이다.

$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 라 놓으면

$$f(1) = a + b = 1, f(2) = 2a + b = 2$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + x$$

$$\therefore f(3) = 2Q(3) + 3$$

4. x 에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k 의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$$

A , B 의 최대공약수는 $A - B$ 의 인수이므로

A , B 의 최대공약수를 G 라 하면

G 는 일차식이므로 $G = x + k$

$x + k$ 는 A 의 인수이어야 하므로

$$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 주어진 조건에서 $k \neq 0$ 이므로 $k = 2$

5. 다음 계산을 하시오.

$$1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} + \frac{1^3}{i} + \frac{1^4}{i} \\ &= \frac{1^5}{i} + \frac{1^6}{i} + \frac{1^7}{i} + \frac{1^8}{i} \cdots \\ &= \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} + \frac{1^3}{i} + \frac{1^4}{i} \\ &= -i - 1 + i + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= 1 + (0 + 0 + \cdots + 0) + \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} \\ &= 1 - i - 1 = -i \end{aligned}$$

6. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1 + bi}{1 + bi}, \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1 + bi}{1 + bi}\right)} = \frac{-1 - bi}{1 - bi}$$

$$\begin{aligned}\therefore w\bar{w} &= \frac{-1 + bi}{1 + bi} \cdot \frac{-1 - bi}{1 - bi} \\ &= \frac{-1 + bi}{1 + bi} \cdot \frac{-(1 + bi)}{-(-1 + bi)} \\ &= \frac{-1 + bi}{1 + bi} \cdot \frac{1 + bi}{-1 + bi} = 1\end{aligned}$$

7. $a < 0, b < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

② $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a}}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{bi}$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{bi}$

해설

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$
 $= (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b}$
 $= \sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{a}\sqrt{bi}$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

8. $|x - 1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x - 1| = 3 - |x|$ 에서,

$|x| + |x - 1| = 3$ 이다.

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - (x - 1) = 3$$

$$\therefore x = -1$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - (x - 1) = 3$$

$0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x + (x - 1) = 3$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 구하는 해는

$x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

9. 이차방정식 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^4 + \beta^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 13$$

$$\begin{aligned}\alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= (13)^2 - 2\alpha^2\beta^2\end{aligned}$$

$$= (13)^2 - 2(-2)^2 = 161$$

10. $x^2 - 3x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ 을 두 근으로 하는 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 + x + 25 = 0$

② $x^2 - 3x + 15 = 0$

③ $x^2 - x + 25 = 0$

④ $x^2 + 2x + 13 = 0$

⑤ $x^2 - 2x + 13 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 5$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 10 = -1$$

$$(\alpha^2 + 1) + (\beta^2 + 1) = -1 + 2 = 1$$

$$(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = (\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) + 1$$

$$= 25 - 1 + 1 = 25$$

$$\therefore x^2 - x + 25 = 0$$

11. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 두 점 $(1, 8)$, $(-1, 4)$ 를 지날 때, 이 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은?

① 최댓값: 4

② 최솟값: 4

③ 최댓값: 1, 최솟값: 3

④ 최댓값: 6

⑤ 최솟값: 1

해설

$y = x^2 + 2ax + b$ 가 두 점 $(1, 8)$, $(-1, 4)$ 를 지나므로

$$8 = 1 + 2a + b, 4 = 1 - 2a + b$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 5$$

$$\therefore y = x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값은 4

12. x, y 가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x + 2)^2 - (y - 3)^2 + 1$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x + 2)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$$

따라서 $x = -2, y = 3$ 일 때

주어진 식의 최댓값은 1이다.

13. 세 실수 a, b, c 가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a + b + c = 1, ab + bc + ca = 1, abc = 1$$

이 때, $(a + b)(b + c)(c + a)$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$a + b + c = 1$ 에서

$$a + b = 1 - c, b + c = 1 - a, c + a = 1 - b$$

$$(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$= (1 - c)(1 - a)(1 - b)$$

$$= 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

14. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

15. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$ 가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned}(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a \\&= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a \\&= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a\end{aligned}$$

$x^2+8x=A$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (A+7)(A+15)+a \\&= A^2+22A+105+a \\&= (A+11)^2-16+a\end{aligned}$$

따라서, $a=16$ 일 때 이차식 $x^2+8x+11$ 의 완전제곱식이 된다.

16. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

$A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
 $A = ag, B = bg$ (a, b, g 는 다항식) ... ㉠로 쓸 수 있다.
 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.

$\therefore g$ 는 B, R 의 공약수이다. ... ㉡

역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면

$B = b'g', R = r'g'$ (b', r', g' 은 다항식) ... ㉠' 으로 쓸 수 있다.
 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.

$\therefore g'$ 은 A, B 의 공약수이다. ... ㉡'

이상에서 $\{g \mid g \text{ 는 } A, B \text{ 의 공약수}\} = \{g' \mid g' \text{ 은 } B, R \text{ 의 공약수}\}$... ㉢

$\therefore A, B$ 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. ... ㉣

위 과정에서 옳지 않은 것은?

① ㉠, ㉠'

② ㉡, ㉡'

③ ㉢

④ ㉣

⑤ 없다.

해설

유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.

17. 이차방정식 $x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -k, \alpha\beta = 3k - 11$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= k^2 - 12k + 44 = (k - 6)^2 + 8$$

따라서 $k = 6$ 일 때 $(\alpha - \beta)^2$ 는 최소

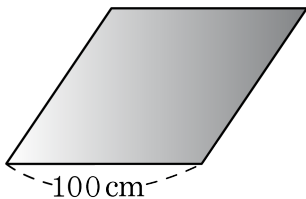
해설

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \text{이므로}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{k^2 - 12k + 44}}{1}$$

$\therefore k^2 - 12k + 44$ 가 최소이려면 $k = 6$

18. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S 를 만들고자 한다. S 의 단면적의 최댓값은?



① 695 cm^2

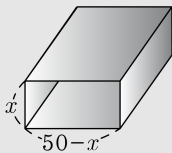
② 710 cm^2

③ 625 cm^2

④ 525 cm^2

⑤ 410 cm^2

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으 구부리면 단면적 S 는

$$\begin{aligned} S &= x(50 - x) = -x^2 + 50x \\ &= -(x - 25)^2 + 625 \end{aligned}$$

$\therefore x = 25$ 일 때, S 의 최댓값은 625 cm^2

19. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$a = bc, b = ca, c = ab,$$

$$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$$

$$abc \neq 0, \quad abc = 1,$$

$$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$$

$$a = \pm 1, b = \pm 1, c = \pm 1$$

그러나 $abc = 1$ 이므로, a, b, c 중에서 -1 인 것은 없거나 2 개이다.

$$\therefore (a, b, c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$