1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+7 \geq 3x \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 3개일 때, a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4 < a \leq 5$

해설

$2x+7 \geq 3x$ 를 풀면 $x \leq 7$ 이다.
$a \leq x \leq 7$을 만족하는 정수 3 개가 존재하려면 $4 < a \leq 5$ 이다.

2. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \geq 0$

$x^2 - 7x + 10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

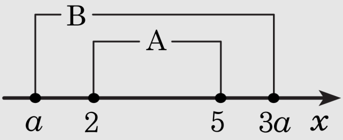
$2 \leq x \leq 5$

$x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

3. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면

$-8 \le x^2-8 \le 8$

$0 \le x^2 \le 16$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k < x-2 < k$

$-k+2 < x < k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면

$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로

$k \le 6,\ k \le 2$

$\therefore 0 < k \le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 4x - 1 < 3x + 5 \\ 6x + a \leq 7x + 1 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 정수의 개수가 2개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4 < a \leq 5$

해설

$4x - 1 < 3x + 5$ 를 풀면 $x < 6$ 이고, $6x + a \leq 7x + 1$ 을 풀면 $a - 1 \leq x$ 이다.
따라서 $a - 1 \leq x < 6$ 을 만족하는 정수의 개수가 2개이기 위해서 $3 < a - 1 \leq 4$, 따라서 $4 < a \leq 5$ 이다.

5. 연립부등식 $\begin{cases} 3x > a \\ 5x - 1 \leq 4x + 9 \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수가 4 일 때, a 의 값의 범위는?

① $16 \leq a < 17$　② $17 \leq a < 19$　③ $18 \leq a < 19$

④ $18 \leq a < 21$　⑤ $20 \leq a < 21$

해설

$5x - 1 \leq 4x + 9$ 를 풀면 $x \leq 10$ 이고, $3x > a$ 를 풀면 $x > \frac{a}{3}$ 이다.

따라서 $\frac{a}{3} < x \leq 10$ 이고 만족하는 정수의 개수가 4 개가 되기 위해서 $6 \leq \frac{a}{3} < 7$, 따라서 $18 \leq a < 21$ 이다.

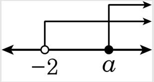
6. 연립부등식 $\begin{cases} x < -2 \\ x \geq a \end{cases}$ 의 해집합이 공집합일 때, a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

공집합이므로 $a \geq -2$ 이다.
따라서 가장 작은 정수는 -2 이다.



7. 두 부등식 $2(5-2x) \geq x+5$, $2x+1 > x+a$의 공통해가 존재하지 않을 때, a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \geq 2$

해설

$2(5-2x) \geq x+5$, $5 \geq 5x$ $\quad \therefore \ x \leq 1$

$2x+1 > x+a$ $\quad \therefore \ x > a-1$

따라서 해가 존재하지 않기 위해서는 $a-1 \geq 1$이어야 한다.

$\therefore \ a \geq 2$

8. 구간 $[2,3]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $x^2-a(a+1)x+a^3 \le 0$을 만족하는 실수 a의 최솟값과 최댓값의 곱은?(단, $a>1$)

① 2　② $2\sqrt{3}$　③ 3　④ $3\sqrt{2}$　⑤ 5

해설

$[2,3] \Leftrightarrow 2 \le x \le 3$

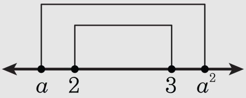
$x^2-a(a+1)x+a^3 \le 0$

$(x-a)(x-a^2) \le 0$

$a<x<a^2(\because\ a>1)\quad a \le 2, a^2 \ge 3$

$\therefore\ a$의 최댓값 : 2

a의 최솟값 : $\sqrt{3} \rightarrow \therefore\ 2\sqrt{3}$



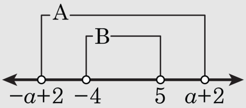
9. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x+1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x-2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \le 3$ ② $0 < a < 3$ ③ $0 \le a \le 3$

④ $a \ge 3$ ⑤ $a \ge 6$

해설

$\therefore\ a \ge 6$



10. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{a}{4} \geq \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8} \\ 3x - 1 \geq 5x - 7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x가 3개일 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-\dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2} \leq a < \dfrac{1}{2}$ ③ $0 \leq a < 1$

④ $\dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{2} \leq a < \dfrac{3}{2}$

해설

$\dfrac{x}{2} - \dfrac{a}{4} \geq \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}$ 에서 $x \geq a - \dfrac{1}{2}$

$3x - 1 \geq 5x - 7$ 에서 $x \leq 3$

$\therefore\ a - \dfrac{1}{2} \leq x \leq 3$

연립부등식을 만족하는 정수 x가 3개이려면

$0 < a - \dfrac{1}{2} \leq 1$

$\therefore\ \dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{3}{2}$

11. 연립부등식 $\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases}$ 를 만족하는 정수가 3개만 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a < 4$ ② $4 < a < 7$ ③ $a \le 7$

④ $4 < a \le 7$ ⑤ $4 \le a \le 7$

해설

$$\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < \dfrac{a-4}{3} \end{cases}$$

정수 x는 $-2, -1, 0$이므로 $0 < \dfrac{a-4}{3} \le 1$

$\therefore\ 4 < a \le 7$

12. 연립부등식

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x+1) + 1 < 4x - 1 \\ -a < x < a \end{cases}$$

의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 2$ ② $0 < a \le 2$ ③ $0 < a < 3$
④ $0 < a \le 3$ ⑤ $2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x+1) + 1 < 4x - 1 \cdots ㉠ \\ -a < x < a \cdots ㉡ \end{cases}$$

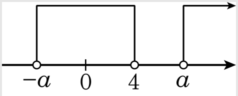
㉠ : $12 - x < 2(x+1) + 1$ 의 해는 $x > 3$

$2(x+1) + 1 < 4x - 1$ 의 해는 $x > 2$

$\therefore\ x > 3$

㉡ : $-a < x < a$

연립부등식의 해가 없으려면 다음 그림과 같아야 하므로 양수 a 의 값의 범위는 $0 < a \le 3$ 이다.



13. 연립부등식 $\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \\ |x| < a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위를 구하여라.

① $3 < a \leq 4$ ② $0 < a \leq 3$ ③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \leq 4$ ⑤ $0 < a < 4$

해설

$\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \cdots ㉠ \\ |x| < a \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6 < -x+2$ 의 해는 $x < -4$

$-x+2 < -2x-1$ 의 해는 $x < -3$

$\therefore x < -4$

㉡에서 $|x| < a$는 $-a < x < a$ 두 연립부등식의 해가 없으려면

$-a \geq -4$, $a \leq 4$,

그런데 a는 양수이므로 a의 값의 범위는 $0 < a \leq 4$ 이다.

14. $a-1<x<a+1$ 을 만족하는 모든 x 가 $-1<x<3$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0<a<2$　　② $0 \le a \le 2$　　③ $a<0,\ a>2$

④ $a \le 0,\ a \ge 2$　　⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \ge -1$ 이고, $a+1 \le 3$ 이어야 하므로

$a \ge 0,\ a \le 2$

$\therefore\ 0 \le a \le 2$

15. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$　　㉡ $ac > 0$

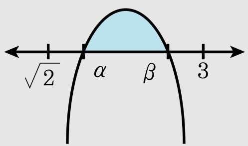
㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이
$a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$