

1. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

2. 수직선 위의 두 점 A(-3), B(6)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 3 : 2로 외분하는 점을 Q라 한다. 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2 + 1} = 3 \text{에서 } P(3)$$

$$\frac{3 \times 6 - 2 \times (-3)}{3 - 2} = 24 \text{에서 } Q(24)$$

$$\therefore \overline{PQ} = |24 - 3| = 21$$

3. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad \quad \quad), k < (\quad \quad \quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

4. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

5. 원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을
 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x)^2 + y^2 + a(-x) + by = 0$
즉, $x^2 + y^2 - ax + by = 0$
이것이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
 $-a = 2 - b, b = 2a - 4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 8$
 $\therefore a + b = 6 + 8 = 14$

6. 두 점 A(1,4), B(3,5) 와 x 축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 45 ② 43 ③ 41 ④ 39 ⑤ 37

해설

점 P 가 x 축 위의 점이므로 $P(x,0)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (-4)^2 + (x-3)^2 + (-5)^2 = 2x^2 - 8x + 51 \\ &= 2(x-2)^2 + 43\end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 43 이다.

7. 점 A(1, 2)와 B(-1, -2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?
- ① $C(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
② $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
③ $C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
④ $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
⑤ $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
점 C의 좌표를 (x, y)라 하면, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 + 2x + y^2 + 4y = 15 \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 15 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $x + 2y = 0$
 $\therefore x = -2y$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $4y^2 - 4y + y^2 + 4y = 15$
 $\therefore y^2 = 3$
 $\therefore y = \pm\sqrt{3}$
따라서 $x = \mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)
 $\therefore C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

8. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x축 위에 있을 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?
- ① 6 ② $4\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{5} + \sqrt{3}$
 ④ $3 + \sqrt{17}$ ⑤ $2 + \sqrt{3}$

해설

B(6, 1)을 x축에 대해 대칭 이동한 점을 B'이라 하면 그림에서 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로,
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$ 이므로
 $\therefore (\overline{AP} + \overline{BP} \text{의 최솟값}) = \overline{AB'} = \sqrt{(6-2)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$

9. 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 외분한 점을 각각 P, Q, R 이라 할 때, 세 점의 좌표는 P(-2, 3), Q(3, 2), R(-1, -2) 이다. 이 때, 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

- ① (1, 0)
- ② (0, 1)
- ③ (-1, 0)
- ④ (0, -1)
- ⑤ (0, 0)

해설

△ABC 의 세 변 AB, BC, CA 를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$) 으로 내분(외분)한 점을 각각 P, Q, R 이라 하면
△PQR 의 무게중심은 △ABC 의 무게중심과 같다.
△PQR 의 무게중심의 좌표는
 $\left(\frac{-2+3-1}{3}, \frac{3+2-2}{3}\right) = (0, 1)$ 이므로
△ABC 의 무게중심의 좌표도 (0, 1) 이다.

10. 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 $ab < 0, bc > 0$ 일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

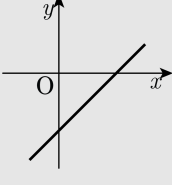
주어진 조건에서

$ab < 0, bc > 0$ 이므로

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$$

$\therefore$ (기울기) > 0 , (y 절편) < 0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로 지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



11. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$ 은 k 의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

- ㉠ (1, 1) ㉡ (1, 0) ㉢ (3, 1)
㉣ (-1, -3) ㉤ (3, 0)

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k 에 대하여

정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$

이 식이 k 에 값에 관계없이 성립하려면

$3x+y-4=0$, $5x-2y-3=0$

이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1$, $y=1$

즉, k 의 값에 관계없이 점(1, 1)을 지난다.

12. 서로 평행한 두 직선 $3x - y + 5 = 0$, $3x - y - 5 = 0$ 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ $\sqrt{5}$

④ $\sqrt{7}$

⑤ $\sqrt{10}$

해설

서로 평행한 두 직선

$3x - y + 5 = 0$, $3x - y - 5 = 0$ 사이의 거리는

직선 $3x - y + 5 = 0$ 위의 점 $(0, 5)$ 와

직선 $3x - y - 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

구하는 거리는

$$\frac{|0 - 5 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

13. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

- ① $3x + 4y = 0$ ② $x - 2y + 5 = 0$ ③ $3x - 4y = 0$
④ $x + 2y + 5 = 0$ ⑤ $x - 2y - 5 = 0$

해설

$3x - 4y - 5 = 0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$3a - 4b - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AP}$ 의 중점을 (X, Y) 라 하면

$$X = \frac{1+a}{2}, Y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2X - 1, b = 2Y - 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3(2X - 1) - 4(2Y - 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 6X - 8Y = 0$$

$$\therefore 3x - 4y = 0$$

14. 두 점 A(-2, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = 4$ ② $x^2 + y^2 + 4x = 0$
③ $x^2 + y^2 - 4x = 0$ ④ $x^2 + y^2 + 4y = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 4y = 0$

해설

점 P 의 좌표를 P(x,y) 라 하면
 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$
즉 $4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2$ 이므로
 $4\{(x-1)^2 + y^2\} = (x+2)^2 + y^2$
 $3x^2 + 3y^2 - 12x = 0$
 $\therefore x^2 + y^2 - 4x = 0$

15. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

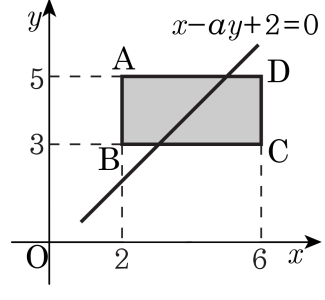
▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 (1, -2) 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 (1, -2) 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

16. 다음 그림에서 □ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x - ay + 2 = 0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

즉 (4, 4)이다.

직선 $x - ay + 2 = 0$ 이 점 (4, 4)를 지나야 한다.

따라서 (4, 4)를 대입하면 $4 - 4a + 2 = 0$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

17. 세 직선 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \\ ax+y=0 \end{cases}$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 모든 상수 a

의 값을 구하면?

- ① $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
 ② $a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
 ③ $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$
 ④ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
 ⑤ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

해설

$$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots \textcircled{A} \\ 2x-3y=-4 & \cdots \textcircled{B} \\ ax+y=0 & \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

에서 $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 의 교점은 $(1, 2)$ 이다.

(i) $\textcircled{C}$ 이 점 $(1, 2)$ 를 지날 때, $a+2=0$ 에서 $a=-2$

(ii) $\textcircled{C}$ 이 $\textcircled{A}$ 과 평행할 때, $a=\frac{1}{2}$

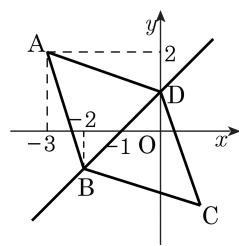
(iii) $\textcircled{C}$ 이 $\textcircled{B}$ 과 평행할 때, $a=-\frac{2}{3}$

이상에서 구하는 모든 상수 a 의 값은

$$a=-2 \text{ 또는 } a=\frac{1}{2}$$

$$\text{또는 } a=-\frac{2}{3} \text{ 이다.}$$

18. 다음 그림에서 점 B와 점 D를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3, 2)$ 일 때, 마름모 ABCD의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD의 중점은 $M(-1, 0)$, 사각형 ABCD가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1 ,

점 B와 점 D의 y 값을 a, b 라 하면

$b - a = 2, \frac{a + b}{2} = 0$ 이므로 $a = -1, b = 1$ 이다.

$\therefore D(0, 1)$

$\overline{AM} = 2\sqrt{2}, \overline{MD} = \sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD의 넓이는

$$4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = 8$$

19. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a + b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고}$$

이 점은 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

$$\therefore a + 2b - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5}$ 이다.

$$\therefore 3a + b = 5$$

20. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 와 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M, 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

직선의 방정식 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$ 의 교점을 지난다.

그림과 같이 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 즉 $y = k(x + 2) - 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$ 을 지나므로 이 직선이 $\overline{AB}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3 = k(1 + 2) - 1, \quad k = \frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1 = k(3 + 2) - 1, \quad k = \frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$\therefore \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$

21. 점 $(1, -1)$ 에서 직선 $ax + by = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a, b 의 관계를 바르게 설명한 것은?

- ① $a - b = 0$
- ② $a - b = \sqrt{2}$
- ③ $a + b = 0$
- ④ $ab = 0$
- ⑤ $ab = \sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$
$$|a - b| = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0, (a + b)^2 = 0$$

따라서 $a + b = 0$

22. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

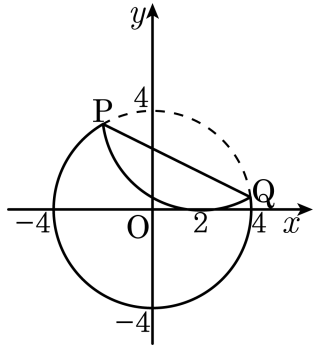
23. 원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6) - (x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2) = 0$
 $2(a - 1)x + 2(a + 1)y - 4 = 0$
 $\therefore (a - 1)x + (a + 1)y - 2 = 0 \dots \textcircled{1}$
또, 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 을
표준형으로 바꾸면,
 $(x + 1)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1, a)$ 이다. 이 때, 직선 $\textcircled{1}$ 이
점 $(-1, a)$ 를 지나야 하므로 $-(a - 1) + a(a + 1) - 2 = 0$
 $a^2 - 1 = 0,$
 $\therefore a^2 = 1$

24. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 점 $(2, 0)$ 에서 x 축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편을 구하여라.

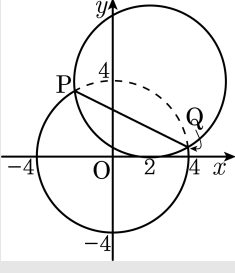


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

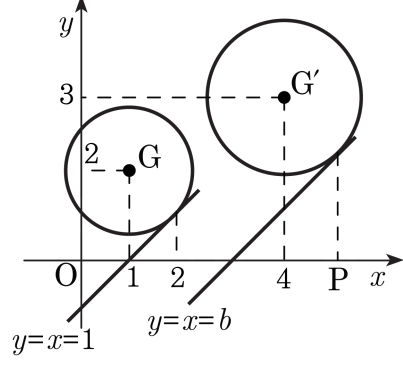
해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 에서 x 와 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ //



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$
 $\therefore x + 2y - 5 = 0$
 따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편은 5이다.

25. 다음 그림과 같이 같은 크기의 두 원 $G : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$, $G' : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$ 가 있다. 또, 원 G 는 $x=2$ 에서 직선 $y=x-1$ 에 접하고, G' 은 $x=p$ 에서 직선 $y=x-b$ 에 접하고 있다. 이 때, $p+b$ 의 값은?

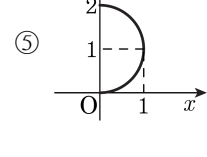
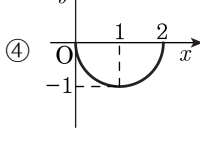
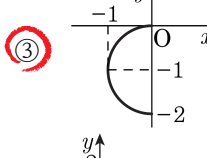
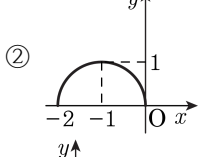
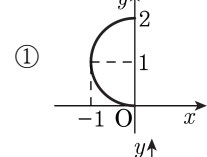
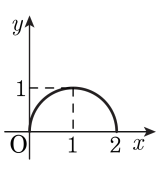


- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

원 G' 은 원 G 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 원 G 의 접점의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 원 G' 의 접점의 좌표는 $(5, 2)$ 이다.
따라서, $p=5$ 이고, 점 $(5, 2)$ 는 직선 $y=x-b$ 위의 점이므로 $2=5-b$ 에서 $b=3$
 $\therefore p+b=5+3=8$

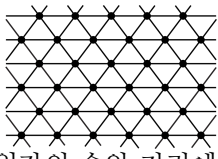
26. 도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때,
 도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?



해설

도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프는
 도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를
 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

27. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1 일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서
점 O 에서 우측으로 a 칸
위상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각
하자.

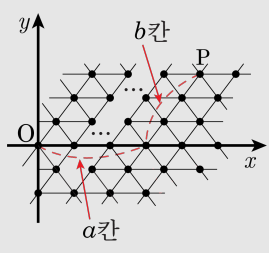
$$\text{이 때 } \overline{OP}^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$$

$$= a^2 + ab + b^2 = 7$$

$$4a^2 + 4ab + 4b^2 = (2a+b)^2 + 3b^2 = 28$$

가능한 $3b^2 = 0, 3, 12, 27$ 일 때

$$(2a+b)^2 = 28, 25, 16, 1$$



28. 점 P(3,2)를 지나며 기울기가 음수인 임의의 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A,B라 할 때, $\overline{OA} + \overline{OB}$ 의 최솟값을 구하면?(단, O는 원점)

- ① $6 + 2\sqrt{6}$
- ② $5 + 2\sqrt{6}$
- ③ $4 + 2\sqrt{6}$
- ④ $3 + 2\sqrt{6}$
- ⑤ $2 + 2\sqrt{6}$

해설

$a > 0$ 일때 음의 직선이므로, $y = -ax + b$
(3, 2)를 지나므로 $2 = -3a + b, \quad b = 3a + 2$
x 축과의 교점 :
 $0 = -a \cdot x + b, \quad ax = b, \quad x = \frac{b}{a} = \frac{3a + 2}{a} = 3 + \frac{2}{a}$
 $\therefore A\left(3 + \frac{2}{a}, 0\right)$
y 축과의 교점: $y = b = 3a + 2$
 $\therefore B(0, 3a + 2)$
 $\therefore \overline{OA} + \overline{OB} = 3 + \frac{2}{a} + 3a + 2 \geq 5 + 2 \cdot \sqrt{6}$
($\because a > 0$ 이기에 산술기하 성립)
따라서 구하는 최솟값은 $\therefore 5 + 2\sqrt{6}$

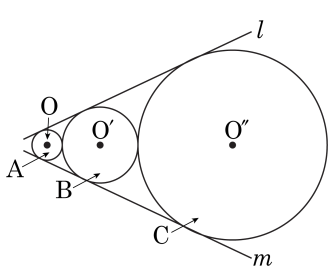
29. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$
- ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}, y = \pm \frac{4x - 3y}{5}$
기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

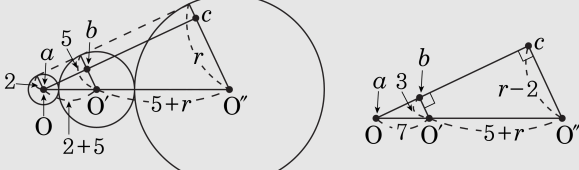
30. 다음 그림과 같이 두 직선 l, m 에 접하는 세원 A, B, C 가 서로 외접하고 있다. 두 원 A, B 의 반지름의 길이가 각각 2, 5 일 때, 원 C 의 지름의 길이는? (단, 원의 중심은 일직선 위에 있다.)



- ① 15 ② 17 ③ 19
 ④ 21 ⑤ 25

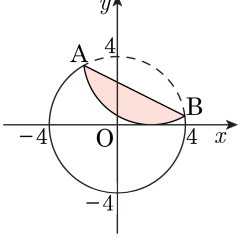
해설

세 원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 생각해 보자. 원 C 의 반지름을 r 이라고 하면, 다음 두 직각삼각형은 닮음이다.



$$\begin{aligned} \therefore (2+5) : 3 &= (12+r) : (r-2) \\ \Rightarrow 36+3r &= 7r-14 \\ \Rightarrow r &= 12.5 \\ \therefore \text{지름이 } 25 \end{aligned}$$

31. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 현 AB 를 접는 선으로 하여 접었을 때, 호 AB 가 x 축과 점 (2, 0) 에서 접한다. 이 때, 직선 AB 의 방정식을 구하여라.



- ① $x + 2y - 4 = 0$ ② $x + 2y - 5 = 0$
 ③ $2x + y - 6 = 0$ ④ $2x + y - 5 = 0$
 ⑤ $2x + y - 4 = 0$

해설

다음 그림과 같이 호 AB 를 일부분으로 하는 원을 그리면, 새로운 원은 반지름의 길이가 4 이고,

x 축과 점 (2, 0) 에서 접하므로

중심의 좌표가 (2, 4) 가 된다.

즉, 새로운 원의 방정식은

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

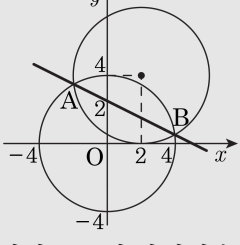
이 때, 선분 AB 는 두 원의 공통현이므로 직선 AB 의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 16) - (x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4) = 0$$

$$4x + 8y - 20 = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$



32. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2my + m^2 - 7 = 0$, $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + m^2 - 9 = 0$ 가 직교할 때 m 값을 구하면?

① $-4, 2$

② $-4, -2$

③ $4, -2$

④ $2, \sqrt{2}$

⑤ $-2, \sqrt{2}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$$(x-1)^2 + (y+m)^2 = 8$$

$$(x-m)^2 + (y+1)^2 = 10$$

두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을

이루므로

$$(m-1)^2 + (m-1)^2 = 18, (m-1)^2 = 9, m-1 = \pm 3$$

$$m = 4, -2$$

33. 직선 $x+y=r$ 에 원 $x^2+y^2=r$ 이 접할 때, 양수 r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2+y^2=r$, $x+y=r$ 이 접하므로 연립방정식의 해가 중근을 가진다.

$$x^2+(r-x)^2=r, 2x^2-2rx+r^2-r=0$$

$$D/4=r^2-2(r^2-r)=0 \text{ 에서}$$

$$-r^2+2r=0,$$

$$\therefore r=0, 2$$

따라서 양수 $r=2$

34. 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 는 다음의 조건에 따라 이동한다.

- ㉠ $x > y$ 이면 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동 한다.

㉡ $x \leq y$ 이면 x 축의 방향으로 1 만큼 평행 이동한다.
- 처

음 점 P 의 좌표가 $(1, 0)$ 일 때, 점 P 가 이동을 시작하여 100 번째 도착하는 점의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

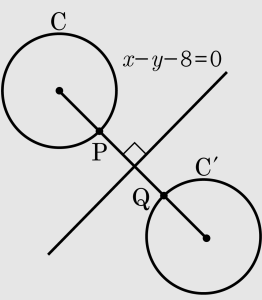
조건에 따라 이동시켜보면,
 $(1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1)$
 $\rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow \cdots$
 $\therefore 3n - 1$ 번째에 (n, n) 에 도착한다.
 $\Rightarrow (3 \times 33) - 1 = 98$ 번째에 $(33, 33)$ 에 도착한다.
 $\therefore 100$ 번째는 $(33, 34)$
 $\Rightarrow (a, b) = (33, 34)$
 $a + b = 67$

35. 원 $C : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을 직선 $x - y - 8 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C' 이라 하고 두 원 C, C' 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최솟값은?

- ① 1
- ② 3
- ③ $7\sqrt{5} - 12$
- ④ 5
- ⑤ $11\sqrt{2} - 10$

해설

선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면
 다음 그림과 같이 두 원의 중심을 연결
 한 선분이
 두 원과 각각 만나는 점을 P, Q 로 잡
 으면 된다.
 이 때, 원 $C : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을
 표준형으로 나타내면
 $(x + 3)^2 + y^2 = 25$ 이므로
 이 원의 중심은 $(-3, 0)$ 이고 반지름의 길이는 5 이다.
 이 원을 직선 $x - y - 8 = 0$ 에 대하여 대칭이동한
 원 C' 의 중심을 (a, b) 라 하면
 두 점 $(-3, 0)$ 과 (a, b) 를 이은



선분의 중점 $\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 가

직선 $x - y - 8 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{a-3}{2} - \frac{b}{2} - 8 = 0$$

$$\therefore a - b = 19 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 직선 $x - y - 8 = 0$, 즉 $y = x - 8$ 의 기울기는 1 이고,
 두 원의 중심 $(-3, 0)$, (a, b) 를 연결한 직선과 수직이므로

$$\frac{b}{a+3} = -1$$

$$\therefore a + b = -3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 8, b = -11$

따라서, 두 원의 중심 $(-3, 0), (8, -11)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{\{8 - (-3)\}^2 + \{-11 - 0\}^2} = 11\sqrt{2}$$

이므로 다음 그림에서 선분 PQ 의
 길이의 최솟값은

$$11\sqrt{2} - 5 \times 2 = 11\sqrt{2} - 10$$

