1. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0$, $a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

2. 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(6)$에 대하여 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점을 P, $3 : 2$로 외분하는 점을 Q라 한다. 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\frac{2\times6+1\times(-3)}{2+1}=3\text{에서 } P(3)$$

$$\frac{3\times6-2\times(-3)}{3-2}=24\text{에서 } Q(24)$$

$$\therefore\ \overline{PQ}=|24-3|=21$$

3. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad\qquad),\ k < (\qquad\qquad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

4. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

5. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을

y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$

즉, $x^2+y^2-ax+by=0$

이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과

같으므로 계수를 비교하면

$-a=2-b,\ b=2a-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$

$\therefore\ a+b=6+8=14$

6. 두 점 $A(1,4)$, $B(3,5)$ 와 x 축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 45　② 43　③ 41　④ 39　⑤ 37

해설

점 P 가 x 축 위의 점이므로 $P(x,0)$ 이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 = (x-1)^2+(-4)^2+(x-3)^2+(-5)^2 = 2x^2-8x+51$

$= 2(x-2)^2 + 43$

따라서 $x = 2$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 43이다.

7. 점 $A(1,\ 2)$와 $B(-1,\ -2)$를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $C(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

② $C(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

③ $C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

④ $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

⑤ $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면, $\overline{AB} = \overline{BC}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2x+y^2+4y=15 \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB} = \overline{CA}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x+y^2-4y=15 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $x+2y=0$

$\therefore\ x=-2y$

이것을 ㉠에 대입하면 $4y^2-4y+y^2+4y=15$

$\therefore\ y^2=3$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{3}$

따라서 $x=\mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore\ C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

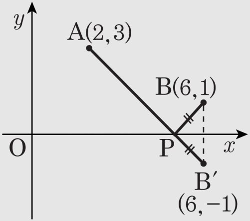
8. 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(6,\ 1)$이 있다. 점 P가 x축 위에 있을 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하면?

① 6　② $4\sqrt{2}$　③ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

④ $3+\sqrt{17}$　⑤ $2+\sqrt{3}$

해설

$B(6,\ 1)$을 x축에 대해 대칭 이동한 점을 B'이라 하면 그림에서



$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로,

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}$이므로

$\therefore\ (\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값$)$

$=\overline{AB'}=\sqrt{(6-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$

9. 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 를 $2:1$ 로 외분한 점을 각각 P, Q, R 이라 할 때, 세 점의 좌표는 $P(-2,\ 3)$, $Q(3,\ 2)$, $R(-1,\ -2)$ 이다. 이 때, 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

① $(1,\ 0)$ ② $(0,\ 1)$ ③ $(-1,\ 0)$

④ $(0,\ -1)$ ⑤ $(0,\ 0)$

해설

$\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA 를 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0)$ 으로 내분(외분)한 점을 각각 P, Q, R 이라 하면

$\triangle PQR$ 의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 같다.

$\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+3-1}{3},\ \dfrac{3+2-2}{3}\right) = (0,\ 1)$ 이므로

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표도 $(0,\ 1)$ 이다.

10. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

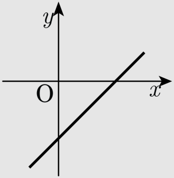
주어진 조건에서

$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로



지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.

11. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$은 k의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$　② $(1,\ 0)$　③ $(3,\ 1)$

④ $(-1,\ -3)$　⑤ $(3,\ 0)$

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k에 대하여
정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$
이 식이 k에 값에 관계없이 성립하려면
$3x+y-4=0,\ 5x-2y-3=0$
이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1,\ y=1$
즉, k의 값에 관계없이 점$(1,\ 1)$을 지난다.

12. 서로 평행한 두 직선 $3x-y+5=0,\ 3x-y-5=0$사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

서로 평행한 두 직선
$3x-y+5=0,\ 3x-y-5=0$사이의 거리는
직선 $3x-y+5=0$ 위의 점 $(0,5)$ 와
직선 $3x-y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
구하는 거리는

$$\frac{|0-5-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

13. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$ ② $x-2y+5=0$ ③ $3x-4y=0$

④ $x+2y+5=0$ ⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면

$$X=\frac{1+a}{2},\ Y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

$\therefore 3x-4y=0$

14. 두 점 A(–2, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1인 점 P의 자취의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$
② $x^2 + y^2 + 4x = 0$
③ $x^2 + y^2 - 4x = 0$
④ $x^2 + y^2 + 4y = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 4y = 0$

해설

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 1$
즉 $4\overline{\mathrm{PB}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2$ 이므로
$4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\} = (x+2)^2 + y^2$
$3x^2 + 3y^2 - 12x = 0$
$\therefore\ x^2 + y^2 - 4x = 0$

15. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

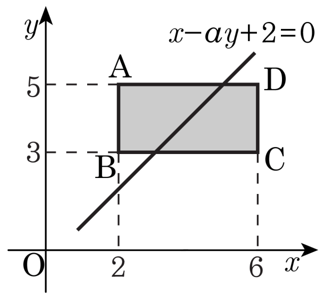
해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

16. 다음 그림에서 □ABCD 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x-ay+2=0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

즉 $(4,4)$ 이다.
직선 $x-ay+2=0$ 이 점 $(4,4)$ 를 지나야 한다.
따라서 $(4,4)$ 를 대입하면 $4-4a+2=0$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

17. 세 직선 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \\ ax+y=0 \end{cases}$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 모든 상수 a 의 값을 구하면?

① $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

② $a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

③ $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

④ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

⑤ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

해설

$$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y=-4 & \cdots ㉡ \\ ax+y=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

에서 ㉠, ㉡의 교점은 $(1,\ 2)$ 이다.

(i) ㉢이 점$(1,\ 2)$ 를 지날 때, $a+2=0$ 에서 $a=-2$

(ii) ㉢이 ㉠과 평행할 때, $a=\frac{1}{2}$

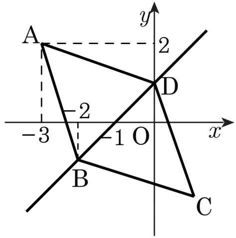
(iii) ㉢이 ㉡과 평행할 때, $a=-\frac{2}{3}$

이상에서 구하는 모든 상수 a 의 값은

$a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

또는 $a=-\frac{2}{3}$ 이다.

18. 다음 그림에서 점 B 와 점 D 를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3,\ 2)$ 일 때, 마름모 ABCD 의 넓이를 구하면?



▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

대각선 BD 의 중점은 $M(-1,\ 0)$, 사각형 ABCD 가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1,

점 B 와 점 D 의 y 값을 a, b 라 하면

$b-a=2$, $\dfrac{a+b}{2}=0$ 이므로 $a=-1$, $b=1$ 이다.

$\therefore\ D(0,\ 1)$

$\overline{AM}=2\sqrt{2}$, $\overline{MD}=\sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD 의 넓이는

$$4\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)=8$$

19. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots㉠$$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$$

$\therefore a+2b-1=0\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

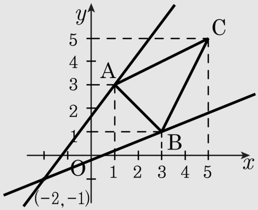
$\therefore\ 3a+b=5$

20. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle$ABC 와 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

직선의 방정식 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은
k 의 값에 관계없이 항상 두 직선
$ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$
의 교점을 지난다.



그림과 같이 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$
즉 $y = k(x + 2) - 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점$(-2,\ -1)$ 을 지나므로
이 직선이 $\overline{\text{AB}}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3 = k(1 + 2) - 1,\quad k = \frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1 = k(3 + 2) - 1,\quad k = \frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5} \le k \le \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$$\therefore\ \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$$

21. 점 $(1,\ -1)$ 에서 직선 $ax+by=0(a\neq 0,\ b\neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a-b=0$ ② $a-b=\sqrt{2}$ ③ $a+b=0$

④ $ab=0$ ⑤ $ab=\sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a\times 1+b\times(-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$|a-b|=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

양변을 제곱하면 $a^2-2ab+b^2=2a^2+2b^2$

$a^2+2ab+b^2=0,\ (a+b)^2=0$

따라서 $a+b=0$

22. 점 $(1,2)$ 와 직선 $x+2y-1+k(2x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k+1+2(2-k)-1|}{\sqrt{(2k+1)^2+(2-k)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5k^2+5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k=0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

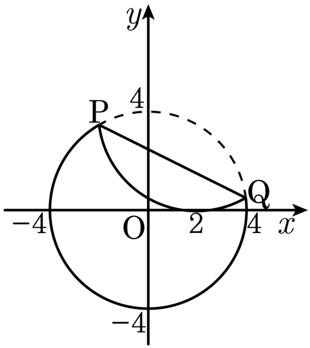
23. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0 \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0$,
$\therefore\ a^2=1$

24. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$을 점 $(2,0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

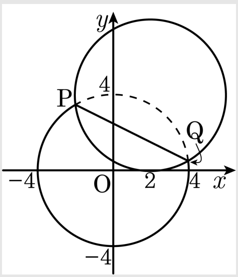


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2,0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$//



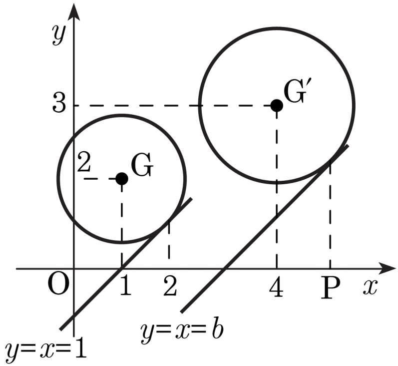
이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.

25. 다음 그림과 같이 같은 크기의 두 원 G : $(x-1)^2+(y-2)^2=2$, G′ : $(x-4)^2+(y-3)^2=2$가 있다. 또, 원 G는 $x=2$에서 직선 $y=x-1$ 에 접하고, G′은 $x=p$에서 직선 $y=x-b$에 접하고 있다. 이 때, $p+b$의 값은?

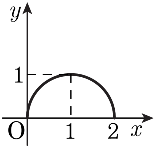


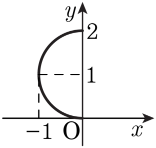
① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

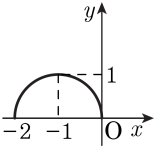
해설

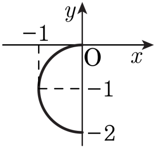
원 G′ 은 원 G를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 원 G 의 접점의 좌표는 (2, 1) 이므로
원 G′ 의 접점의 좌표는 (5, 2) 이다.
따라서, $p=5$이고, 점 (5, 2)는 직선 $y=x-b$ 위의 점이므로
$2=5-b$에서 $b=3$
$\therefore\ p+b=5+3=8$

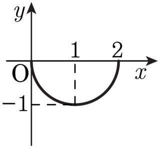
26. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

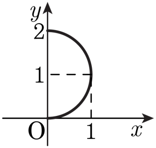


①


②


③


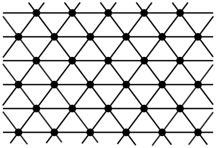
④


⑤


해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

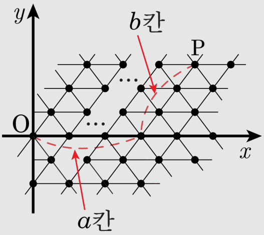
27. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1 일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



① 4　　② 6　　③ 8　　④ 12　　⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서
점 O 에서 우측으로 a 칸
우상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각하자.



이 때 $\overline{\mathrm{OP}}^2 = \left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$

$= a^2 + ab + b^2 = 7$

$4a^2+4ab+4b^2 = (2a+b)^2+3b^2 = 28$

가능한 $3b^2 = 0, 3, 12, 27$ 일 때

$(2a+b)^2 = 28, 25, 16, 1$

28. 점 $\mathrm{P}(3,2)$를 지나며 기울기가 음수인 임의의 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}$의 최솟값을 구하면?(단, O 는 원점)

① $6+2\sqrt{6}$ ② $5+2\sqrt{6}$ ③ $4+2\sqrt{6}$

④ $3+2\sqrt{6}$ ⑤ $2+2\sqrt{6}$

해설

$a>0$ 일때 음의 직선이므로, $y=-ax+b$

$(3,\ 2)$ 를 지나므로 $2=-3a+b,\quad b=3a+2$

x 축과의 교점 :

$$0=-a\cdot x+b,\quad ax=b,\quad x=\frac{b}{a}=\frac{3a+2}{a}=3+\frac{2}{a}$$

$$\therefore\ \mathrm{A}\left(3+\frac{2}{\mathrm{a}},\ 0\right)$$

y 축과의 교점: $y=b=3a+2$

$\therefore\quad \mathrm{B}(0,\ 3a+2)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}\ =3+\frac{2}{a}+3a+2\geq 5+2\cdot\ \sqrt{6}$$

$(\because\ \ a>0$ 이기에 산술기하 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\therefore 5+2\sqrt{6}$

29. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

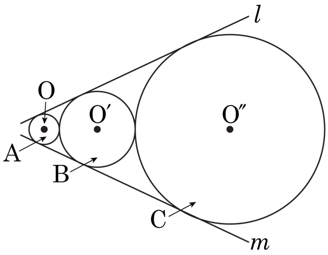
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$, $y = \pm\frac{4x - 3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

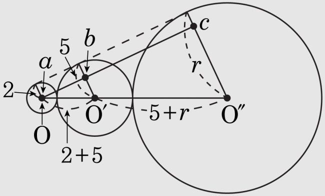
30. 다음 그림과 같이 두 직선 l, m 에 접하는 세원 A, B, C 가 서로 외접하고 있다. 두 원 A, B 의 반지름의 길이가 각각 $2, 5$ 일 때, 원 C 의 지름의 길이는? (단, 원의 중심은 일직선 위에 있다.)

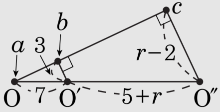


① 15　② 17　③ 19　④ 21　⑤ 25

해설

세 원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 생각해보자. 원 C 의 반지름을 r 이라고 하면, 다음 두 직각삼각형은 닮음이다.





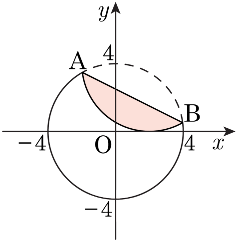
$\therefore\ (2+5):3=(12+r):(r-2)$

$\Rightarrow\ 36+3r=7r-14$

$\Rightarrow\ r=12.5$

$\therefore$ 지름이 25

31. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 을 현 AB 를 접는 선으로 하여 접었을 때, 호 AB 가 x 축과 점 $(2,\ 0)$ 에서 접한다. 이 때, 직선 AB 의 방정식을 구하여라.



① $x+2y-4=0$ ② $x+2y-5=0$

③ $2x+y-6=0$ ④ $2x+y-5=0$

⑤ $2x+y-4=0$

해설

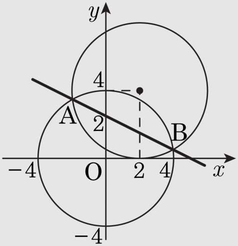
다음 그림과 같이 호 AB 를 일부분으로 하는 원을 그리면, 새로운 원은 반지름의 길이가 4 이고,

x 축과 점 $(2,\ 0)$ 에서 접하므로

중심의 좌표가 $(2,\ 4)$ 가 된다.

즉, 새로운 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=16$



이 때, 선분 AB 는 두 원의 공통현이므로 직선 AB 의 방정식은

$x^2+y^2-16-\left\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\right\}=0$

$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2-4x-8y+4)=0$

$4x+8y-20=0$

$\therefore\ x+2y-5=0$

32. 두 원 $x^2+y^2-2x+2my+m^2-7=0$, $x^2+y^2-2mx+2y+m^2-9=0$ 가 직교할 때 m값을 구하면?

① $-4,\ 2$　　② $-4, -2$　　③ $4, -2$

④ $2,\ \sqrt{2}$　　⑤ $-2,\ \sqrt{2}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$(x-1)^2+(y+m)^2=8$

$(x-m)^2+(y+1)^2=10$

두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로

$(m-1)^2+(m-1)^2=18$, $(m-1)^2=9$, $m-1=\pm 3$

$m=4, -2$

33. 직선 $x+y=r$ 에 원 $x^2+y^2=r$ 이 접할 때, 양수 r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2+y^2=r,\ x+y=r$ 이 접하므로 연립방정식의 해가 중근을 가진다.

$x^2+(r-x)^2=r$, $2x^2-2rx+r^2-r=0$

$D/4=r^2-2(r^2-r)=0$ 에서

$-r^2+2r=0,$

$\therefore\ r=0,\ 2$

따라서 양수 $r=2$

34. 좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$ 는 다음의 조건에 따라 이동한다.

㉠ $x > y$ 이면 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동 한다.
㉡ $x \le y$ 이면 x 축의 방향으로 1 만큼 평행 이동한다.

처음 점 P 의 좌표가 $(1,\ 0)$ 일 때, 점 P 가 이동을 시작하여 100 번째 도착하는 점의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 65　② 66　③ 67　④ 68　⑤ 69

해설

조건에 따라 이동시켜보면,

$(1,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (2,1)$

$\to (1,2) \to (2,2) \to \cdots$

$\therefore\ 3n-1$ 번째에 (n,n) 에 도착한다.

$\Rightarrow\ (3\times 33)-1 = 98$ 번째에 $(33,\ 33)$ 에 도착한다.

$\therefore$ 100 번째는 $(33,\ 34)$

$\Rightarrow\ (a,b) = (33,34)$

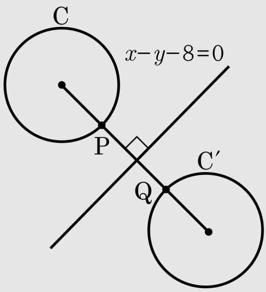
$a+b = 67$

35. 원 C : $x^2+y^2+6x-16=0$ 을 직선 $x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C′ 이라 하고 두 원 C, C′ 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최솟값은?

① 1　　② 3　　③ $7\sqrt{5}-12$

④ 5　　⑤ $11\sqrt{2}-10$

해설



선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면
다음 그림과 같이 두 원의 중심을 연결한 선분이
두 원과 각각 만나는 점을 P, Q 로 잡으면 된다.
이 때, 원 C : $x^2+y^2+6x-16=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x+3)^2+y^2=25$ 이므로
이 원의 중심은 $(-3,0)$ 이고 반지름의 길이는 5 이다.
이 원을 직선 $x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한
원 C′ 의 중심을 (a,b) 라 하면
두 점 $(-3,0)$ 과 (a,b) 를 이은

선분의 중점 $\left(\dfrac{-3+a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ 가

직선 $x-y-8=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{a-3}{2}-\dfrac{b}{2}-8=0$

$\therefore a-b=19 \cdots\cdots$ ㉠

또, 직선 $x-y-8=0$, 즉 $y=x-8$ 의 기울기는 1 이고,
두 원의 중심 $(-3,0)$, (a,b) 를 연결한 직선과 수직이므로

$\dfrac{b}{a+3}=-1$

$\therefore a+b=-3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8, b=-11$
따라서, 두 원의 중심 $(-3,0), (8,-11)$ 사이의 거리는

$\sqrt{\{8-(-3)\}^2+(-11-0)^2}=11\sqrt{2}$
이므로 다음 그림에서 선분 PQ 의
길이의 최솟값은
$11\sqrt{2}-5\times 2=11\sqrt{2}-10$