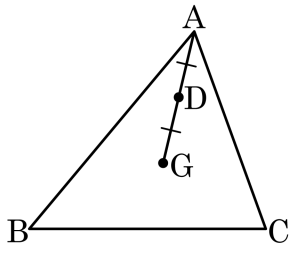


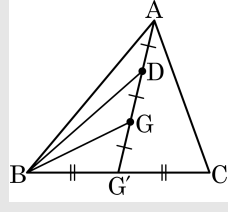
1. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 점 G 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이고 점 D 는 $\overline{AG}$ 의 중점일 때, $\frac{\triangle DBG}{\triangle ABC}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{AG}$ 의 연장선이 $\overline{BC}$ 와 만난 점을 G' 이라고 하면



$\overline{BG'} = \overline{G'C}$ 에서

$$\triangle ABG' = \frac{1}{2}\triangle ABC$$

$$\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{AG'} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle DBG &= \frac{1}{3}\triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\triangle ABC \\ &= \frac{1}{6}\triangle ABC \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\triangle DBG}{\triangle ABC} = \frac{1}{6}$$

2. 직선 $ax + by + c = 0$ 은 $ab > 0$, $bc < 0$ 일 때, 몇 사분면을 지나지 않는가?

- ① 제 1 사분면
- ② 제 2 사분면
- ③ 제 3 사분면
- ④ 제 4 사분면
- ⑤ 제 1 사분면, 제 2 사분면

해설

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 에서
 $-\frac{a}{b} < 0$ ($\because ab > 0$)
 $-\frac{c}{b} > 0$ ($\because bc < 0$)이므로
제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면을 지난다.

3. 두 직선 $ax - 2y + 2 = 0$, $2x + by + c = 0$ 이 점 $(2, 4)$ 에서 직교할 때, 다음 중 상수 a, b, c 의 값으로 옳은 것은?

① $a = -3, b = 3, c = -11$

② $a = -3, b = 3, c = -12$

③ $a = 3, b = -3, c = -13$

④ $a = 3, b = 3, c = -15$

⑤ $a = 3, b = 3, c = -16$

해설

(i) 두 직선이 직교하므로 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \times \left(-\frac{2}{b}\right) = -1$$

$$\Rightarrow a = b$$

(ii) 두 직선이 모두 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

$$\Rightarrow 2a - 8 + 2 = 0, \quad 4 + 4b + c = 0$$

(i), (ii) 를 연립하면, $a = 3, b = 3, c = -16$

4. 두 직선 $y = |x| + 2$ 와 $y = ax + 1 - 2a$ 의 그래프가 교점을 갖지 않을
정수 a 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y = |x| + 2 \cdots \textcircled{A} \\ y = ax + 1 - 2a \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

②에서 $a(x - 2) + 1 - y = 0$

즉, a 의 값에 관계없이 정점 $(2, 1)$ 을 지난다.

그림에서 교점을 갖지 않으려면

$(0, 2), (2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ 보다 크고

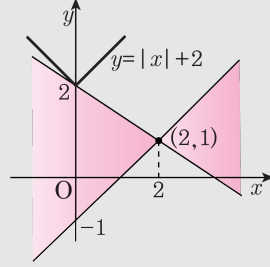
$(0, -1), (2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기

기

1 보다 작거나 같아야 한다.

$$\therefore -\frac{1}{2} < a \leq 1$$

$$\therefore a = 0, a = 1$$



5. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

6. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대한 설명이다.

1. 점 A와 점 B는 x 축 위에 있다.

2. 점 B의 x 좌표는 점 A의 좌표보다 크다.

3. $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

4. $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$

점 A, B, C, D의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $a < b < c < d$

② $a < c < b < d$

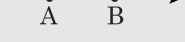
③ $a < c < d < b$

④ $c < a < b < d$

⑤ $c < a < d < b$

해설

1, 2에 의하여 A, B의 위치는 그림과 같다.



3에서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다. 4에서 $\triangle BCD$ 는 정삼각형이다. x 축의 아랫부분에 점 C, D를 잡아도 같은 결과를 얻는다.

$\therefore a < c < b < d$

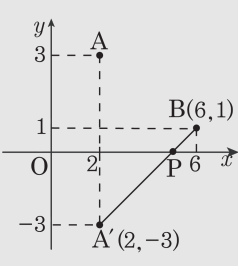
7. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x축 위에 있을 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

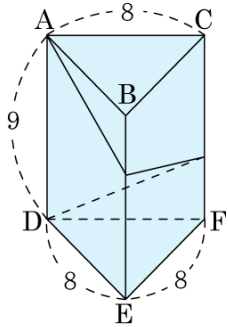
해설

(2, 3)을 x축에 대해
대칭이동한 점을
A'(2, -3)라 하면
최단거리는 $\overline{A'B}$ 의 길이

$\therefore \sqrt{(2-6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$



8. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

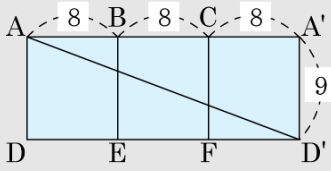


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$$\overline{AD'} = \frac{\sqrt{24^2 + 9^2}}{\sqrt{576 + 81}} = \frac{\sqrt{657}}{\sqrt{657}} = 3\sqrt{73}$$



9. 좌표평면 위의 점 A(1, 4) 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 3 : 2 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 (4, 1) 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 B(a , b) 라 하면

점 Q 의 좌표는 $Q\left(\frac{3a-2}{3-2}, \frac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 (4, 1) 이므로

$$3a-2=4 \quad \therefore a=2,$$

$$3b-8=1 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore B(2, 3)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

10. 세 점 A(2,1), B(1,3), C(2,0)에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$
- ② $x + 2y + 3 = 0$
- ③ $x - 3y - 2 = 0$
- ④ $x - 4y + 5 = 0$
- ⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x,y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= 3\overline{CP}^2 \text{에서} \\ 2(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 &= \\ 3(x^2 - 4x + y^2 + 4) \\ 3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 &= 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12 \\ 2x - 10y + 8 &= 0 \\ \therefore x - 5y + 4 &= 0\end{aligned}$$

11. 세 점 A(1, 6), B(-2, 2), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소일 때, a + b의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= \{(a-1)^2 + (b-6)^2\} + \{(a+2)^2 + (b-2)^2\} \\ & \quad + \{(a-4)^2 + (b-1)^2\} \\ &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 62 \\ &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) + 32 \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 32 \end{aligned}$$

이때, a, b는 실수이므로
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값은
a = 1, b = 3일 때 최소이다.
 $\therefore a + b = 4$

12. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

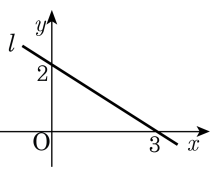
$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

13. 직선 l 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음
중이 직선 위의 점은?



- ① (0, 3)
- ② (2, 0)
- ③ (2, 1)
- ④ (6, -2)
- ⑤ (6, -1)

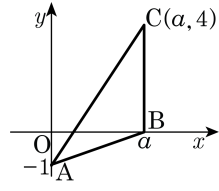
해설

주어진 직선 l 의 기울기는 $-\frac{2}{3}$, y 절편이 2이므로

직선 l 의 방정식은 $y = -\frac{2}{3}x + 2 \cdots \textcircled{1}$

따라서, $\textcircled{1}$ 을 만족하는 점은 (6, -2)이다.

14. 다음 그림과 같이 점 $A(0, -1)$, $B(a, 0)$, $C(a, 4)$ 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. 점 B 를 지나면서 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 직선이 존재할 때, 직선의 방정식은?



- ① $y = -\frac{4}{a}x + 4$ ② $y = -\frac{3}{a}x + 3$ ③ $y = -\frac{2}{a}x + 2$
 ④ $y = -\frac{a}{2}x + 1$ ⑤ $y = -\frac{1}{a}x + 4$

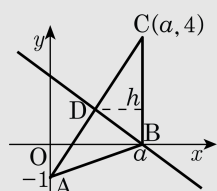
해설

$\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a = 2a$$

점 B 를 지나면서 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 직선과 $\overline{AC}$ 와의 교점을 D ,

$\triangle BCD$ 에서 $\overline{BC}$ 를 밑변으로 보았을 때 높이를 h 라 하면



$$(\triangle BCD \text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h = 2h$$

이 넓이는 $\triangle ABC$ 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$2h = a \quad \therefore h = \frac{a}{2}$$

따라서 점 D 의 x 좌표는 $a - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a$

$\therefore D$ 의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}\right)$

두 점 $B(a, 0)$, $D\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 를 지나는

$$\text{직선의 방정식은 } y - 0 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{a}{2} - a}(x - a)$$

$$\therefore y = -\frac{3}{a}x + 3$$

15. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+2=0$ 의 교점과 원점을 지나는 직선이 있다. 이 직선과 점 $(10, -2)$ 사이의 거리의 제곱은?

① 13 ② 26 ③ 52 ④ 78 ⑤ 104

해설

두 직선의 교점은 $x+y-4=0$, $2x-y+2=0$ 을 연립하여 풀면,

$$x = \frac{2}{3} \quad y = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ 과 } (0, 0) \text{ 을 지나는 직선은 } y = 5x$$

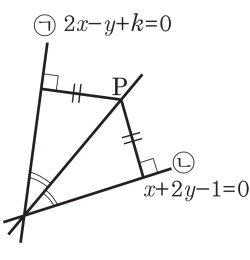
$\therefore 5x-y=0$ 과 $(10, -2)$ 사이의 거리를 구하면,

$$\frac{|5 \times 10 + (-1) \times (-2)|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{52}{\sqrt{26}}$$

$$\Rightarrow \text{거리의 제곱은 } \frac{52^2}{26} = 104$$

16. 두 직선 $2x - y + k = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3, 1)$ 을 지날 때, 상수 k 의 값의 합을 구하면?

- ① -2 ② 4 ③ -6
 ④ 8 ⑤ -10



해설

$2x - y + k = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $x + 2y - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 (점 P와 $\textcircled{1}$ 사이의 거리) = (점 P와 $\textcircled{2}$ 사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6 - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow |5 + k| = 4$$

$$\Rightarrow 5 + k = \pm 4 \Rightarrow k = -9 \text{ 또는 } k = -1$$

$$\therefore k \text{ 의 합 : } -10$$

17. 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = -x + 2$ 위를 움직일 때 점 $Q(a - b, a + b)$ 의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x = 1$

② $y = 2$

③ $x + y = 2$

④ $x - y = -4$

⑤ $x + y = 0$

해설

$P(a, b)$ 가 $y = -x + 2$ 위의 점이므로

$$b = -a + 2 \cdots \text{㉠}$$

$Q(a - b, a + b) = (x, y)$ 라 하면,

$$a - b = x, a + b = y$$

$$\therefore a = \frac{x + y}{2}, b = \frac{y - x}{2}$$

$$\text{㉠에 대입하면 } \frac{y - x}{2} = -\frac{x + y}{2} + 2$$

$$\therefore y - x = -(x + y) + 4$$

$$\therefore y = 2$$

18. 두 원 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, $x^2 + y^2 = r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을

$$C_1 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9 \leftarrow \text{중심 } (3, 4)$$

$$C_2 : x^2 + y^2 = r^2 (r > 0) \leftarrow \text{중심 } (0, 0)$$

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이다.

이 때, $|r-3| = 5$ 이어야 하므로 $r-3 = \pm 5$

$$\therefore r = 8 (\because r > 0)$$

19. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

20. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2$, $(x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 4개

해설

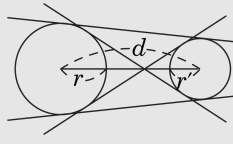
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

 $r + r' = 5, r \sim r' = 1 \quad d = 9$ 이므로

$r+r'=5, r \sim r'=1, d=9$ 이므로
 $r+r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
 4 개



21. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?
- ① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$ ② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$
③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$ ④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$
⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
 $5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$
원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
 $\frac{D}{4} < 0$ 에서 $-b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$
 $\therefore b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

22. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 은 x 축과 두 점에서 만난다. 이 두 점 사이의 거리는 얼마인가?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$(x^2 + 4x + 4 - 4) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 1 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

x 축과 만나는 점은 y 의 좌표가 0 이므로

$$(x + 2)^2 + 1^2 = 4$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{두 점의 거리는 } -2 + \sqrt{3} - (-2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

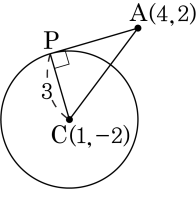
23. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
 $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{CP} = 3$
 $\therefore \overline{AP} = 4$



24. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

25. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

26. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

27. 원 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ 위의 점 C에서 두 점 A(6, -4), B(10, 0)을 지나는 직선 l 에 이르는 거리의 최댓값은?

① $5 + 4\sqrt{2}$

② $5 + \frac{9}{2}\sqrt{2}$

③ $10 + \sqrt{2}$

④ 11

⑤ 12

해설

직선 AB의 방정식은

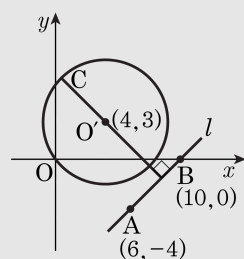
기울기가 $m = \frac{-4-0}{6-10} = 1$ 이므로

$y = x - 10$ 즉, $x - y - 10 = 0$ 이고

원의 중심 (4, 3)에서 직선 AB에 이르는 거리는

$$\frac{|4-3-10|}{\sqrt{1+1}} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로 원 위의 점 C에서}$$

직선 l 에 이르는 거리의 최댓값은 $\frac{9\sqrt{2}}{2} + 5$ 이다.



28. 원 $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ 가 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $5\sqrt{2} - 5$

⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 (0, 5), (5, 0) 이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} - 2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$

29. x, y 가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ 의
최솟값은?

- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

다음 그림에서

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$
$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

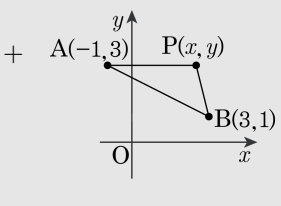
= $\overline{AP} + \overline{BP}$ 를 의미 하므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$$

그러므로 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

+



30. $\triangle ABC$ 의 변 BC, CA, AB의 중점이 각각 P(-1, a), Q(3, 3), R(1, 6)이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b, \frac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

- ① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심은 $\triangle PQR$ 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$$\left(\frac{-1+3+1}{3}, \frac{a+3+6}{3}\right) = \left(b, \frac{10}{3}\right)$$

$$b=1, \frac{a+9}{3} = \frac{10}{3}$$

$$a=1, b=1 \therefore ab=1$$

31. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 (a, b) 이므로 $b = a + 1$
따라서 $(a, a + 1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$$\sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2}$$
$$= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2}$$
양변을 제곱하여 정리하면
$$(a-5)^2 = (a+3)^2$$
$$16a = 16$$
$$\therefore a = 1$$
$$\therefore (a, b) = (1, 2)$$
따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$

32. 두 정점 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x, y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$
$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

이것을 정리하면, $(x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$
점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2}, 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.

33. 세 원 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a - b$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt{95}}{5}$
 ② $\frac{\sqrt{101}}{5}$
 ③ $\frac{\sqrt{105}}{5}$
- ④ $\frac{\sqrt{110}}{5}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{115}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$
 $\therefore 2x + y - 6 = 0 \dots\dots\textcircled{\tiny{A}}$
 원 C_3 의 방정식을 변형하면
 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - 25 = 0$ 이고,
 두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은
 $(2a - 4)x + (2b - 4)y - (a^2 + b^2 - 29) = 0 \dots\textcircled{\tiny{B}}$
 두 직선 $\textcircled{\tiny{A}}, \textcircled{\tiny{B}}$ 이 일치하므로
 $\frac{2a - 4}{2} = \frac{2b - 4}{1} = \frac{a^2 + b^2 - 29}{6}$
 $\frac{2a - 4}{2} = \frac{2b - 4}{1}$ 에서 $2a - 4 = 4b - 8$
 $\therefore a = 2b - 2 \dots\dots\textcircled{\tiny{C}}$
 $\frac{2b - 4}{1} = \frac{a^2 + b^2 - 29}{6}$ 에 $\textcircled{\tiny{C}}$ 을 대입하면
 $12b - 24 = (2b - 2)^2 + b^2 - 29$
 $5b^2 - 20b - 1 = 0$
 $\therefore b = \frac{10 \pm \sqrt{105}}{5}$
 그런데 $b > 0$ 이므로 $b = \frac{10 + \sqrt{105}}{5}$
 $\therefore a - b = \frac{\sqrt{105}}{5}$

34. 두 원 $x^2 + y^2 = 11$, $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 길이는?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{11}$ ③ 5 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 11$ 과 $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 방정식은

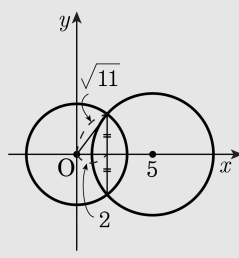
$$(x^2 + y^2 - 11) - (x^2 - 10x + y^2 + 9) = 0$$

$$10x - 20 = 0 \quad \therefore x = 2$$

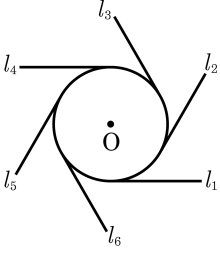
원 $x^2 + y^2 = 11$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 공통현 $x = 2$ 사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$ 이므로 공통현의 길이는

$$2 \times \sqrt{(\sqrt{11})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$$



35. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



- ① 2 배 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배 ③ $3\sqrt{5}$ 배
 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배 ⑤ 5 배

해설

그림에서 $l_1 : y = -r$ 라 놓으면

$l_2 : y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$

l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30^\circ = \frac{r}{x}$ 이므로

$$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.

