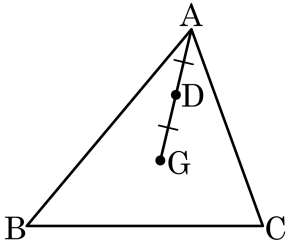
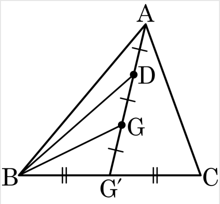
1. 다음 그림과 같이 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 점 G는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심이고 점 D는 $\overline{\mathrm{AG}}$의 중점일 때, $\dfrac{\triangle\mathrm{DBG}}{\triangle\mathrm{ABC}}$의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{AG}}$의 연장선이 $\overline{\mathrm{BC}}$와 만난 점을 G′이라고 하면



$\overline{\mathrm{BG}}' = \overline{\mathrm{G'C}}$에서

$\triangle\mathrm{ABG'} = \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$

$\overline{\mathrm{DG}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{AG'}}$이므로

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DBG} &= \frac{1}{3}\triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC} \\ &= \frac{1}{6}\triangle\mathrm{ABC}\end{aligned}$$

$\therefore\ \dfrac{\triangle\mathrm{DBG}}{\triangle\mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{6}$

2. 직선 $ax + by + c = 0$은 $ab > 0$, $bc < 0$일 때, 몇 사분면을 지나지 않는가?

① 제 1 사분면　② 제 2 사분면

③ 제 3 사분면　④ 제 4 사분면

⑤ 제 1 사분면 ,제 2 사분면

해설

$y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$에서

$-\dfrac{a}{b} < 0 \ (\because \ ab > 0)$

$-\dfrac{c}{b} > 0 \ (\because \ bc < 0)$이므로

제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면을 지난다.

3. 두 직선 $ax-2y+2=0$, $2x+by+c=0$이 점 $(2,\ 4)$에서 직교할 때, 다음 중 상수 a, b, c의 값으로 옳은 것은?

① $a=-3,\ b=3,\ c=-11$
② $a=-3,\ b=3,\ c=-12$
③ $a=3,\ b=-3,\ c=-13$
④ $a=3,\ b=3,\ c=-15$
⑤ $a=3,\ b=3,\ c=-16$

해설

(ⅰ) 두 직선이 직교하므로 기울기의 곱이 -1이다.

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2}\times\left(-\frac{2}{b}\right)=-1$$

$$\Rightarrow \quad a=b$$

(ⅱ) 두 직선이 모두 점 $(2, 4)$를 지난다.

$$\Rightarrow \quad 2a-8+2=0, \quad 4+4b+c=0$$

(ⅰ), (ⅱ) 를 연립하면, $a=3,\ b=3,\ c=-16$

4. 두 직선 $y=|x|+2$ 와 $y=ax+1-2a$ 의 그래프가 교점을 갖지 않을 정수 a 의 개수는?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y=|x|+2 & \cdots ㉠ \\ y=ax+1-2a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $a(x-2)+1-y=0$

즉, a 의 값에 관계없이 정점 $(2,\ 1)$ 을 지난다.

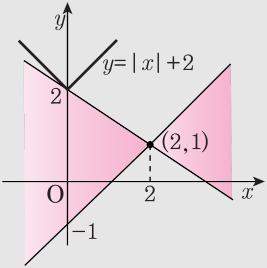
그림에서 교점을 갖지 않으려면

$(0,2),(2,1)$ 을 지나는 직선의 기울기

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ 보다 크고

$(0,-1),(2,1)$ 을 지나는 직선의 기울기

1 보다 작거나 같아야 한다.



$\therefore\ -\frac{1}{2}<a\le 1$

$\therefore a=0,\quad a=1$

5. 원 $x^2+y^2=4$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5}<k<4\sqrt{5}$

④ $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

⑤ $k<-2\sqrt{5}$ 또는 $k>2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<2 \quad \therefore -2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$$

6. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A , B , C , D 에 대한 설명이다.

1. 점 A 와 점 B 는 x 축 위에 있다.
2. 점 B 의 x 좌표는 점 A 의 좌표보다 크다.
3. $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$
4. $\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}$

점 A, B, C, D 의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a<b<c<d$ ② $a<c<b<d$ ③ $a<c<d<b$

④ $c<a<b<d$ ⑤ $c<a<d<b$

해설

1, 2 에 의하여 A, B 의 위치는 그림과 같다.

3 에서 △ABC 는 정삼각형이다. 4 에서 △BCD 는 정삼각형이다.x 축의 아랫부분에 점 C, D 를 잡아도 같은 결과를 얻는다.

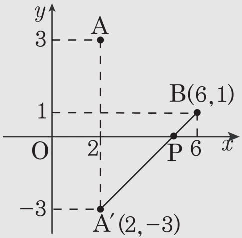
$\therefore\ a<c<b<d$

7. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x축 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하면?

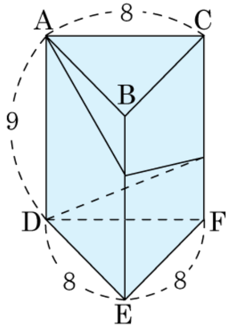
① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

(2, 3)을 x축에 대해
대칭이동한 점을
A′(2, −3)라 하면
최단거리는 $\overline{\mathrm{A'B}}$의 길이
$\therefore \sqrt{(2-6)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$



8. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

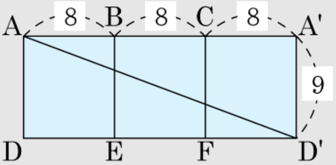


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2 + 9^2} = \sqrt{576 + 81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



9. 좌표평면 위의 점 $A(1,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $3:2$ 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 $(4,\ 1)$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 $B(a,\ b)$ 라 하면

점 Q 의 좌표는 $Q\left(\dfrac{3a-2}{3-2},\ \dfrac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 $(4,\ 1)$ 이므로

$3a-2=4 \quad \therefore\ a=2,$

$3b-8=1 \quad \therefore\ b=3$

$\therefore\ B(2,\ 3)$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$

10. 세 점 $\mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(1,3), \mathrm{C}(2,0)$에 대하여 $2\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=3\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+2y+3=0$ ③ $x-3y-2=0$

④ $x-4y+5=0$ ⑤ $x-5y+4=0$

해설

점 P의 좌표를 (x,y)라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x-2)^2+(y-1)^2$$
$$=x^2-4x+4+y^2-2y+1$$
$$=x^2-4x+y^2-2y+5$$

$$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-1)^2+(y-3)^2$$
$$=x^2-2x+1+y^2-6y+9$$
$$=x^2-2x+y^2-6y+10$$

$$\overline{\mathrm{CP}}^2=(x-2)^2+y^2$$
$$=x^2-4x+4+y^2$$
$$=x^2-4x+y^2+4$$

$2\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=3\overline{\mathrm{CP}}^2$에서

$$2\left(x^2-4x+y^2-2y+5\right)+x^2-2x+y^2-6y+10=3\left(x^2-4x+y^2+4\right)$$

$$3x^2-10x+3y^2-10y+20=3x^2-12x+3y^2+12$$

$$2x-10y+8=0$$

$$\therefore x-5y+4=0$$

11. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$$
$$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$$
$$+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$$
$$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$$
$$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$$
$$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$$

이때, a, b는 실수이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은

$a=1,\ b=3$일 때 최소이다.

$\therefore a+b=4$

12. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$을 지나는 직선의 x절편을 A, y절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle$OAB의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$를 지나는 직선은

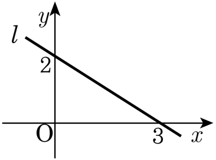
$$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2)-3 = \frac{1}{2}x-4$$

$\Rightarrow$ x절편은 8이고, y절편은 -4이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

13. 직선 l의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중이 직선 위의 점은?



① $(0,\ 3)$ ② $(2,\ 0)$

③ $(2,\ 1)$ ④ $(6,\ -2)$

⑤ $(6,\ -1)$

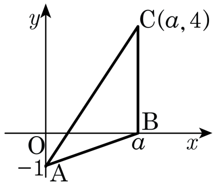
해설

주어진 직선 l 의 기울기는 $-\frac{2}{3}$, y 절편이 2이므로

직선 l의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+2 \cdots$ ㉠

따라서, ㉠ 을 만족하는 점은 $(6,\ -2)$ 이다.

14. 다음 그림과 같이 점 A$(0,\ -1)$, B$(a,\ 0)$, C$(a,\ 4)$를 꼭지점으로 하는 ABC가 있다. 점 B를 지나면서 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 존재할 때, 직선의 방정식은?



① $y=-\frac{4}{a}x+4$　② $y=-\frac{3}{a}x+3$　③ $y=-\frac{2}{a}x+2$

④ $y=-\frac{2}{a}x+1$　⑤ $y=-\frac{1}{a}x+4$

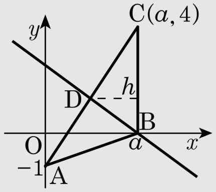
해설

$\triangle$ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot a=2a$

점 B를 지나면서 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선과 $\overline{AC}$ 와의 교점을 D,

$\triangle$BCD에서 $\overline{BC}$를 밑변으로 보았을 때 높이를 h 라 하면



($\triangle$BCD의 넓이) $=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h=2h$

이 넓이는 $\triangle$ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$2h=a$　　$\therefore h=\frac{a}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $a-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}a$

$\therefore$ D의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

두 점 B$(a, 0)$, D $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ 를 지나는

직선의 방정식은 $y-0=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{a}{2}-a}(x-a)$

$\therefore y=-\frac{3}{a}x+3$

15. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+2=0$ 의 교점과 원점을 지나는 직선이 있다. 이 직선과 점 $(10,\ -2)$ 사이의 거리의 제곱은?

① 13 ② 26 ③ 52 ④ 78 ⑤ 104

해설

두 직선의 교점은 $x+y-4=0$, $2x-y+2=0$을 연립하여 풀면,

$x=\frac{2}{3}$ $y=\frac{10}{3}$

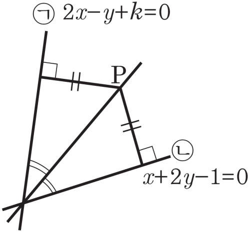
$\Rightarrow$ $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ 과 $(0,\ 0)$ 을 지나는 직선은 $y=5x$

$\therefore$ $5x-y=0$과$(10, -2)$ 사이의 거리를 구하면,

$$\frac{|5\times 10+(-1)\times(-2)|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{52}{\sqrt{26}}$$

$\Rightarrow$ 거리의 제곱은 $\frac{52^2}{26}=104$

16. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2 ② 4 ③ -6

④ 8 ⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots$ ㉠

$x+2y-1=0 \quad \cdots$ ㉡

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k|=4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

17. 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=-x+2$ 위를 움직일 때 점 $Q(a-b,\ a+b)$의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x=1$ ② $y=2$ ③ $x+y=2$

④ $x-y=-4$ ⑤ $x+y=0$

해설

$P(a,\ b)$가 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$b=-a+2 \cdots$ ㉠

$Q(a-b,\ a+b)=(x,\ y)$라 하면,

$a-b=x$, $a+b=y$

$\therefore a=\dfrac{x+y}{2}$, $b=\dfrac{y-x}{2}$

㉠ 에 대입하면 $\dfrac{y-x}{2}=-\dfrac{x+y}{2}+2$

$\therefore y-x=-(x+y)+4$

$\therefore y=2$

18. 두 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, $x^2+y^2=r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을
$C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=9 \leftarrow$ 중심 $(3,4)$
$C_2:x^2+y^2=r^2(r>0) \leftarrow$ 중심 $(0,0)$
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다.
이 때, $|r-3|=5$ 이어야 하므로 $r-3=\pm 5$
$\therefore r=8(\because r>0)$

19. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$
교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$
의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로
$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$
$\therefore m=-2$
이 값을 대입하고 정리하면
$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.
$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$
그러므로 $A+B-C=10$

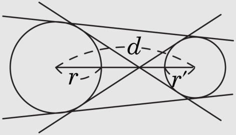
20. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여 두 원의 위치관계를 파악한다.



두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r \sim r' = 1$ $d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

21. 직선 $y=2x+b$ 와 원 $x^2+y^2=4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b<-\sqrt{5}$ 또는 $b>\sqrt{5}$

② $b<-2\sqrt{5}$ 또는 $b>2\sqrt{5}$

③ $b<-3\sqrt{5}$ 또는 $b>3\sqrt{5}$

④ $b<-4\sqrt{5}$ 또는 $b>4\sqrt{5}$

⑤ $b<-5\sqrt{5}$ 또는 $b>5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$5x^2+4bx+b^2-4=0 \cdots\cdots$ ㉠

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(2b)^2-5\left(b^2-4\right)=-b^2+20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이

실근을 갖지 않아야 하므로

$\frac{D}{4}<0$ 에서 $-b^2+20<0, b^2-20>0$

$\therefore b<-2\sqrt{5}$ 또는 $b>2\sqrt{5}$

22. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 은 x 축과 두 점에서 만난다. 이 두 점 사이의 거리는 얼마인가?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$(x^2+4x+4-4)+(y^2-2y+1-1)+1=0$

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

x 축과 만나는 점은 y 의 좌표가 0 이므로

$(x+2)^2+1^2=4$

$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{3}$

두 점의 거리는 $-2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

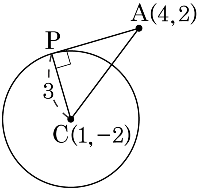
23. 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ 이고 $\overline{\mathrm{CP}} = 3$
$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = 4$



24. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \quad \frac{|m\times(-2)-1\times 1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad (m+3)^2=10m^2+10$$

$$\Rightarrow \quad (3m-1)^2=0,\ m=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+5 \quad \Rightarrow \quad 3m+n=6$

25. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$
$|a - 1| = 10$
$a - 1 = \pm 10$
$a > 0$ 이므로 $a = 11$

26. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을

표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로

중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.

원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에

이르는 거리의 최솟값은

$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

27. 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ 위의 점 C에서 두 점 A$(6,\ -4)$, B$(10,\ 0)$을 지나는 직선 l에 이르는 거리의 최댓값은?

① $5+4\sqrt{2}$ ② $5+\frac{9}{2}\sqrt{2}$ ③ $10+\sqrt{2}$

④ 11 ⑤ 12

해설

직선 AB의 방정식은

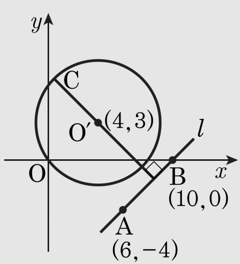
기울기가 $m=\dfrac{-4-0}{6-10}=1$이므로

$y=x-10$ 즉, $x-y-10=0$ 이고

원의 중심 $(4,\ 3)$에서 직선 AB에 이르는 거리는

$\dfrac{|4-3-10|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$이므로 원 위의 점 C에서

직선 l에 이르는 거리의 최댓값은 $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}+5$이다.



28. 원 $x^2 + (y-5)^2 = 4$가 원 $(x-5)^2 + y^2 = 9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2 ② 3 ③ 5

④ $5\sqrt{2}-5$ ⑤ $5\sqrt{2}-13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,5)$, $(5,0)$이므로 중심거리는
$\sqrt{5^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} - 2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$

29. x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

다음 그림에서

$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$ +

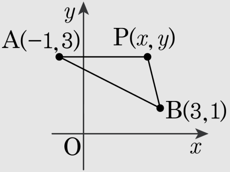
$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 의미 하므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$



30. $\triangle$ABC 의 변 BC, CA, AB 의 중점이 각각 P$(-1,\ a)$, Q$(3,\ 3)$, R$(1,\ 6)$ 이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1　　② $2\sqrt{5}$　　③ 3　　④ 4　　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심은 $\triangle$PQR 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$$\left(\frac{-1+3+1}{3},\ \frac{a+3+6}{3}\right)=\left(b,\ \frac{10}{3}\right)$$

$$b=1,\ \frac{a+9}{3}=\frac{10}{3}$$

$$a=1,\quad b=1\ \ \therefore\ ab=1$$

31. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 $(a,\ b)$ 이므로 $b = a + 1$
따라서 $(a,\ a + 1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$\sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2}$
$= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$(a-5)^2 = (a+3)^2$
$16a = 16$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ (a,\ b) = (1,\ 2)$
따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$

32. 두 정점 $A(-\sqrt{2},\ 0)$, $B(\sqrt{2},\ 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x,\ y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$

$2\left\{(x+\sqrt{2})^2 + y^2\right\} - \left\{(x-\sqrt{2})^2 + y^2\right\} = 9$

이것을 정리하면, $(x+3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ 을 중심으로 하고,

반지름이 5 인 원이다.

33. 세 원 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$, $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a-b$ 의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{95}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{101}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{105}}{5}$
④ $\dfrac{\sqrt{110}}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{115}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-4x-4y+4)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$
$\therefore 2x+y-6=0 \cdots\cdots$ ㉠
원 C_3 의 방정식을 변형하면
$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-25=0$ 이고,
두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은
$(2a-4)x+(2b-4)y-(a^2+b^2-29)=0 \cdots$ ㉡
두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{2a-4}{2}=\frac{2b-4}{1}=\frac{a^2+b^2-29}{6}$$

$\dfrac{2a-4}{2}=\dfrac{2b-4}{1}$ 에서 $2a-4=4b-8$
$\therefore a=2b-2 \cdots\cdots$ ㉢
$\dfrac{2b-4}{1}=\dfrac{a^2+b^2-29}{6}$ 에 ㉢을 대입하면
$12b-24=(2b-2)^2+b^2-29$
$5b^2-20b-1=0$
$\therefore b=\dfrac{10\pm\sqrt{105}}{5}$
그런데 $b>0$ 이므로 $b=\dfrac{10+\sqrt{105}}{5}$
$\therefore a-b=\dfrac{\sqrt{105}}{5}$

34. 두 원 $x^2+y^2=11$, $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{11}$　③ 5　④ $2\sqrt{7}$　⑤ $4\sqrt{2}$

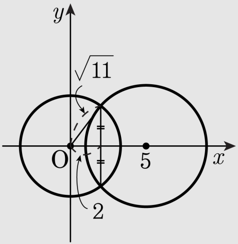
해설

두 원 $x^2+y^2=11$과 $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-11)-(x^2-10x+y^2+9)=0$

$10x-20=0 \quad \therefore x=2$

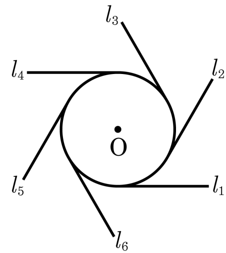
원 $x^2+y^2=11$의 중심 $(0,0)$과 공통현 $x=2$사이의 거리가 2이고,



반지름의 길이가 $\sqrt{11}$이므로 공통현의 길이는

$2\times\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2-2^2}=2\sqrt{7}$

35. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. l_1, l_2, $\cdots$, l_6 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



① 2 배　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 배　　③ $3\sqrt{5}$ 배

④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 배　　⑤ 5 배

해설

그림에서 $l_1 : y=-r$라 놓으면

$l_2 :\ y=\sqrt{3}x+k=\sqrt{3}x-2r$

l_2 의 x 절편은 $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30° = \dfrac{r}{x}$ 이므로

$x=r\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.