1. 다음 빈칸에 알맞은 부등호를 써 넣어라.

m , n 이 양수라고 할 때, 선분 AB 를 m : n 으로 외분하는 점은

i) m ( ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,

ii) m ( ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : >

▷ 정답 : <

해설

외분점을 P 라고 하면

$\overline{AP}$: $\overline{PB}$ = m : n 이므로

$m > n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,

$m < n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

2. 연립부등식 $\begin{cases} 0.2x + 1.6 \le x \\ \frac{5}{2}x - 10 \le 5 \end{cases}$ 의 해가 $a \le x \le b$ 일 때, $b - a$의 값을 구하면?

① 16 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

해설

$\begin{cases} 2x + 16 \le 10x \ \rightarrow 2 \le x \\ 5x - 20 \le 10 \ \rightarrow \ x \le 6 \end{cases}$

$\therefore \ 2 \le x \le 6$

$a = 2, \ b = 6$

$\therefore \ b - a = 6 - 2 = 4$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 5(2x+3) \geq 3x+1 \\ 2(x-3) < -a \end{cases}$ 의 해가 $-2 \leq x < 2$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(i) $5(2x+3) \geq 3x+1$, $x \geq -2$

(ii) $2(x-3) < -a$, $x < \dfrac{-a+6}{2}$

$-2 \leq x < \dfrac{-a+6}{2}$ 와 $-2 \leq x < 2$가 같으므로

$\dfrac{-a+6}{2} = 2$

$\therefore\ a = 2$

4. 다음 연립부등식의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x-8<5x+2 \\ 2x-3\le x+a \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \le -8$

해설

$3x-5x<2+8$

$-2x<10$ 에서

$x>-5$

$2x-x\le a+3$ 에서

$x\le a+3$

$a+3\le -5$ 이어야 해가 없다.

$\therefore\ a\le -8$

5. 부등식 $|x+1|+|x-2|<5$를 만족하는 정수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$|x+1|+|x-2|<5$

구간을 나누어 부등식을 풀어보면

i) $x<-1$일 때

$-x-1-x+2<5$

$x>-2$

$\therefore -2<x<-1$: 정수 없음

ii) $-1\le x<2$일 때

$x+1-x+2<5$

$2<5$: 항상 성립

$\therefore -1\le x<2$: 정수 $-1,\ 0,\ 1$

iii) $x\ge 2$일 때

$x+1+x-2<5$

$x<3$

$\therefore 2\le x<3$: 정수 2

만족하는 정수 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 4개

6. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$ ② $x \le -1$ ③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$ ⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\frac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

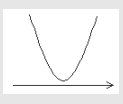
7. 모든 실수 x에 대하여 부등식$(k-2)x^2+2(k-2)x+1>0$이 성립할 때, 실수 k값의 범위가 $m \le k < n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m+n=5$

해설

① $k=2$일 때 $1>0$ $\therefore$성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2)>0$, $k>2$

③ $\frac{D}{4}<0$에서 $(k-2)^2-(k-2)<0$

$(k-2)(k-3)<0$, $2<k<3$

①을 만족하거나 ②와 ③)을 동시에 만족해야 하므로 $2 \le k < 3$

$\therefore m=2, n=3$, $m+n=5$

8. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab = 6$

해설

$ax^2 + 5x + b > 0$ ……㉠
해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3) < 0$ 전개하면
$x^2 - 5x + 6 < 0$ ……㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2 + 5x - 6 > 0$ ……㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

9. a가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2+ax+a=0,\ x^2-2ax+2a+3=0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a의 범위는 ?

① $-1<a<4$

② $-1<a<0$ 또는 $3<a<4$

③ $-1\le a\le 4$

④ $-1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

⑤ $3\le x\le 4$

해설

$x^2+ax+a=0 \quad \cdots ㉠$

$x^2-2ax+2a+3=0 \cdots ㉡$

㉠에서 허근을 가지려면

$D=a^2-4a<0$

$\therefore\ 0<a<4$

㉡에서 허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

$\therefore\ -1<a<3$

한쪽만이 허근을 가지려면,

$\therefore\ -1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

10. x에 대한 이차부등식 $x^2 - 10x - 24 \geq 0$,
$(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$　② $-3 < a < 8$　③ $-3 < a < 4$
④ $-2 < a < 12$　⑤ $-2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 24 \geq 0 & \cdots (가) \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq & \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서
$(x-12)(x+2) \geq 0$
$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 12$ (가)와 (나)의
공통 범위가 존재하지 않으려면 다음 그림에서

$a^2 - a > -2 \cdots (다)$

$a^2 - a < 12 \cdots (라)$

(다)에서 $a^2 - a + 2 > 0$, $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$

$\therefore$ 모든 실수
(라)에서 $a^2 - a - 12 < 0$, $(a+3) \times (a-4) < 0$
$\therefore -3 < a < 4$
따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면
$-3 < a < 4$

11. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

보기

(i) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ii) 2가 두 근 사이에 있다.

① $8 \le m < 10$, $m > 10$
② $8 \le m < 10$, $m > 8$
③ $-10 \le m < 10$, $m > 10$
④ $-10 \le m < 10$, $m > 8$
⑤ $8 \le m < 10$, $m > 12$

해설

(i) 경계값 $x = 2$ 에서

$f(2) > 0$
축의 위치 $m - 4 > 2$
판별식 $D \ge 0$
$\therefore\ 8 \le m < 10$

(ii)

$f(2) < 0$ 이기만 하면 된다.
$\therefore\ m > 10$

12. 세 점 A(4, 6), B(2, 0), C(6, -2)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되게 하는 점 D의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 (5, 2)

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$이다.

평행사변형의 성질에 의하여 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점은 일치해야 하므로

$\frac{2+a}{2}=5,\ \frac{b}{2}=2$

$\therefore\ a=8,\ b=4$

$\therefore\ a+b=12$

13. 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 P(1, 3), Q(5, 1), R(4, 4)일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는?

① $(3, 2)$ ② $(3, 3)$ ③ $\left(\frac{10}{3}, 2\right)$

④ $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$ ⑤ $\left(\frac{11}{3}, 2\right)$

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면

$\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이 $P(1, 3)$이므로

$\frac{2x_2 + x_1}{2+1} = 1$, $\frac{2y_2 + y_1}{2+1} = 3$

$\therefore 2x_2 + x_1 = 3$, $2y_2 + y_1 = 9$ $\cdots$㉠

$\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이 $Q(5, -1)$이므로

$\frac{2x_3 + x_2}{2+1} = 5$, $\frac{2y_3 + y_2}{2+1} = -1$

$\therefore 2x_3 + x_2 = 15$, $2y_2 + y_1 = -3$ $\cdots$㉡

$\overline{CA}$를 2 : 1로 내분하는 점이 $R(4, 4)$이므로

$\frac{2x_1 + x_3}{2+1} = 4$, $\frac{2y_1 + y_3}{2+1} = 4$

$\therefore 2x_1 + x_3 = 12$, $2y_1 + y_3 = 12$ $\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$3(x_1 + x_2 + x_3) = 30$, $3(y_1 + y_2 + y_3) = 18$

$\therefore (x_1 + x_2 + x_3) = 10$, $(y_1 + y_2 + y_3) = 6$

따라서 $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{10}{3}$, $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 2$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{10}{3}, 2\right)$

14. 점 $(2,4)$ 를 지나며 기울기가 음인 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 16 이다. 이 직선의 x 절편을 a, y 절편을 b 라 할 때, $a+b$ 의값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

구하는 직선의 방정식을 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이 직선이 점 $(2,4)$ 를 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{4}{b}=1$

$\therefore\ 4a+2b=ab\cdots$㉠

$\triangle ABC$ 의 넓이가 16 이므로

$\frac{1}{2}ab=16\ \therefore\ ab=32\cdots$㉡

㉠ ㉡에서 $a=4, b=8, a+b=12$

15. $x,\ y$에 대한 연립방정식 $2x+(a+2)y-1=0,\ (a-3)x-2y+2=0$이 해를 갖지 않을 때, 상수 a의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$2x+(a+2)y-1=0,\ (a-3)x-2y+2=0$이 평행해야 한다.
따라서 평행할 조건을 구하면,

$\frac{2}{a-3}=\frac{a+2}{-2}\neq-\frac{1}{2}$

$\frac{2}{a-3}=\frac{a+2}{-2}$에서

$a^2-a-2=0,\ (a-2)(a+1)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-1$

1) $a=2$일 때,

$\frac{2}{-1}=\frac{4}{-2}\neq-\frac{1}{2}$ $\therefore$ 평행

2) $a=-1$일 때,

$\frac{2}{-4}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ $\therefore$ 일치

따라서, 1), 2)에 의하여 $a=2$

16. 점 (3, 4) 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$ 이므로, $|2 + k| = 5$ 이다.

따라서 $k = 3$ ($\because$ k 는 양수)

17. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $1 - \sqrt{5}$
④ $2 - \sqrt{5}$ ⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}^2 = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 하면

$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2,\ 3$

i) $t = 2$ 일 때

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1$

ii) $t = 3$ 일 때

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

18. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$의 한근이 $1 + 2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a + b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x = 1+2i,\ x^2 = -3+4i,\ x^3 = -11-2i,\ x^4 = -7-24i$,
$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$
$= (-7-24i) + a(-11-2i) + b(-3+4i) + 14(1+2i) + 15 = 0$,
$(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$
$\therefore 11a + 3b = 22,\ -2a + 4b = -4$
연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$x = 1 + 2i$에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$
$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$
좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면
$a = k - 2,\ b = 8 - 2k,\ 14 = 5k - 6$
$\therefore\ k = 4,\ a = 2,\ b = 0$

19. 다음 x에 관한 두 개의 이차방정식 $\begin{cases} x^2-2x+a^2=0 \cdots ㉠ \\ x^2-ax+2a=0 \cdots ㉡ \end{cases}$

에서 공통근이 오직 한 개일 때, a의 값과 공통근 k를 구하면?(단, a는 실수)

① $a=0$일 때 $k=0$, $a=-1$일 때, $k=1$

② $a=2$일 때 $k=1\pm\sqrt{3}i$

③ $a=1$일 때 $k=1$, $a=2$일 때, $k=1$

④ $a=3$일 때 $k=2\pm\sqrt{3}$

⑤ $a=2$일 때 $k=-1$, $a=3$일 때, $k=1$

해설

공통근을 $x=k$라 하면

$k^2-2k+a^2=0 \quad \cdots ①$

$k^2-ka+2a=0 \quad \cdots ②$

두 식을 빼주면, $(k+a)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $k=-a$

ⅰ)$a=2$일 때

㉠, ㉡이 같아지므로 성립하지 않는다.

ⅱ)$k=-a$일 때

①에 넣으면 $a=0$또는 $a=-1$

$\begin{cases} a=0 \text{ 이면 } k=0 \\ a=-1 \text{ 이면 } k=1 \end{cases}$

20. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x+1.5y+2z=40\cdots$㉠
$x+y+z=30\cdots$㉡
$(x\geq 1,\ y\geq 1,\ z\geq 1)$라고 하면
㉠$\times 2-$㉡$\times 3=-x+z=-10$,
$x=z+10,\ z\geq 1$이므로
$x=z+10\geq 11$
이 때 $y=18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

21. $a > b$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ 의 해는 $x > a$ 이다.

② $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 $x < b$ 이다.

③ $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 없다.

④ $\begin{cases} x > -a \\ x > -b \end{cases}$ 의 해는 $x > -a$ 이다.

⑤ $\begin{cases} x < -a \\ x > -b \end{cases}$ 의 해는 없다.

해설

② $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 없다.

③ $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 $x < b$

④ $\begin{cases} x > -a \\ x > -b \end{cases}$ 의 해는 $x > -b$

22. A$(2,2)$인 정삼각형 ABC가 있다. 무게중심이 원점일 때, 이 정삼각형의 한변의 길이를 구하면?

① $3\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

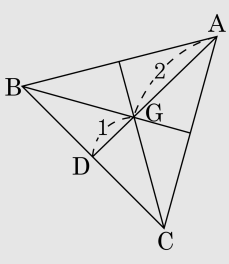
무게중심은 그림처럼 중선을 $2:1$로 내분한다.

$\therefore \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AG} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

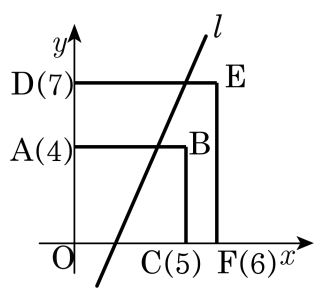
그리고 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2}$

$\therefore a = 2\sqrt{6}$



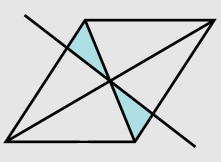
23. 아래 그림에서 직선 l이 두 직사각형 □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분할 때, 직선 $l : y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 중점을 지나는 직선이다.



따라서, □OABC와 □ODEF의 넓이를 동시에 이등분하는 직선 l은 두 직사각형의 중점을 지날때이다.

□OABC의 중점 : $\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\right)$

□ODEF의 중점 : $\left(\frac{6}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 이므로

$y = 3x - \frac{11}{2} \therefore \quad a = 3, b = -\frac{11}{2}$

$\therefore \ a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

해설

직선이 두 사각형과 만나는 점은

$\left(\frac{4-b}{a}, 4\right), \left(\frac{7-b}{a}, 7\right)$ 이다.

이제 각각의 오른쪽 사다리꼴의 넓이를 구해보면

ⅰ)□OABC : $\frac{4}{2}((5 + \frac{b}{a}) + (5 - \frac{4b}{a})) = 10$

$\Rightarrow \quad 2b - 4 + 5a = 0$

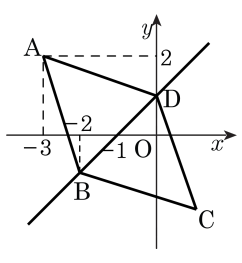
ⅱ)□ODEF : $\frac{7}{2}((6 + \frac{b}{a}) + (6 - \frac{7-b}{a})) = 21$

$\Rightarrow \quad 6a + 2b - 7 = 0$

ⅰ)과 ⅱ)를 연립하면

$a = 3, b = -\frac{11}{2} \therefore \ a + b = 3 - \frac{11}{2} = -\frac{5}{2}$

24. 다음 그림에서 점 B 와 점 D 를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 A$(-3,\ 2)$ 일 때, 마름모 ABCD 의 넓이를 구하면?



▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

대각선 BD 의 중점은 M$(-1,\ 0)$, 사각형 ABCD 가 마름모이므로
$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,
$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로
$\overline{BD}$ 의 기울기는 1,
점 B 와 점 D 의 y 값을 a, b 라 하면

$b - a = 2$, $\dfrac{a+b}{2} = 0$ 이므로 $a = -1$, $b = 1$ 이다.

$\therefore$ D$(0,\ 1)$
$\overline{AM} = 2\sqrt{2}$, $\overline{MD} = \sqrt{2}$ 이므로
마름모 ABCD 의 넓이는

$4\left(\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}\right) = 8$

25. α, β를 $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이라 하고 $P(n) = \alpha^n + \beta^n$라 할 때, $P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 + x + 1 = 0$,

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \alpha^3 = 1,\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

따라서 $n \geq 2$인 모든 정수에 대해

$\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = 0$이고,

β에 대해서도 마찬가지이다.

$P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$

$= (\alpha^{3n} + \beta^{3n}) + (\alpha^n + \beta^n)$

$+(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$

$= (1+1) + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2})$

$+(\beta^n + \beta^{n-1} + \beta^{n-2})$

$= 2 + 0 + 0 = 2$