1. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$또는 $x=r,\ y=s$이다. $p+q+r+s$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

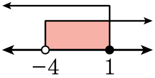
ii) $x = 2y$

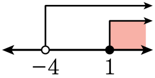
$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

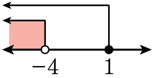
$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

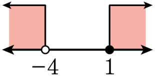
$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

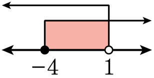
4. 연립부등식 $\begin{cases} x+3>-1 \\ 6-4x \geq 3-x \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 옳게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$x+3>-1 \rightarrow x>-4$

$6-4x \geq 3-x \rightarrow x \leq 1$

$\therefore \ -4<x \leq 1$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \\ 2(3-2x) < -x+10 \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x 의 개수는?

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

i) $3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \Rightarrow x \leq 3$

ii) $2(3-2x) < -x+10 \Rightarrow x > -\dfrac{4}{3}$

연립부등식의 해는 $-\dfrac{4}{3} < x \leq 3$ 이므로, 이를 만족하는 양의 정수 x 의 개수는 1, 2, 3 의 3 개이다.

6. 두 개의 부등식 $\frac{4x-1}{5} \le \frac{x+1}{2}$, $\frac{3x+1}{3} > \frac{x-1}{2}$ 를 동시에 만족하는 정수는?

① 0, 1
② −1, 0, 1, 2
③ −1, 0, 2, 3
④ −1, 0, 1, 2, 3
⑤ −2, − 1, 0, 1, 2

해설

i) $\frac{4x-1}{5} \le \frac{x+1}{2}$ 의 양변에 분모의 최소공배수인 10 을 곱해주면,

$\Rightarrow 2(4x-1) \le 5(x+1) \Rightarrow x \le \frac{7}{3}$

ii) $\frac{3x+1}{3} > \frac{x-1}{2}$ 의 양변에 분모의 최소공배수인 6 을 곱해주면,

$\Rightarrow 2(3x+1) > 3(x-1) \Rightarrow x > -\frac{5}{3}$

따라서 $-\frac{5}{3} < x \le \frac{7}{3}$ 을 만족하는 정수는 −1, 0, 1, 2 이다.

7. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

8. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$ ② $c^2 = b$ ③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$ ⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은 $x = 0$ 으로부터

$y^2 + 2by + c = 0$

y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

9. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1 인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ (　　　)이다. (　　　)안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{2}$　　③ $3\sqrt{2}$　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore \quad y = x \pm 2\sqrt{2}$

10. 직선 $3x+y-5=0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x+y-1=0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로
직선 $3x+y-5=0$에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-n$을 대입하면
$3(x-1)+(y-n)-5=0$
$3x+y-n-8=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $3x+y-1=0$과 일치하므로 $-n-8=-1$ $\therefore$ $n=-7$

11. 점 $(3, 4)$를 y축, x축, 원점에 대하여 대칭이동하는 것을 순서에 관계없이 임의로 반복할 때, 좌표평면 위에 나타나지 않는 점은?

① $(3, -4)$ ② $(-3, 4)$ ③ $(-3, -4)$
④ $(4, 3)$ ⑤ $(3, 4)$

해설

x축대칭은 y의 부호를 반대로, y축대칭은 x의 부호를 반대로, 원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.

12. 부등식 $|x-1| < k+1$이 성립하는 실수가 x가 존재하기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k > -1$ ② $k \geq -1$ ③ $k < 0$

④ $k < 1$ ⑤ $k \leq 1$

해설

$|x-1| < k+1$에서 $|x-1| \geq 0$이므로
x가 존재하기 위해서는 $k+1 > 0$이어야 한다.
따라서 $k > -1$

13. 모든 실수 x에 대하여 x^2+px+p가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2+px+p>-3$

$x^2+px+(p+3)>0$

$D=p^2-4(p+3)=p^2-4p-12<0$

$(p-6)(p+2)<0$

$-2<p<6$

$\therefore$ 최대정수 : 5

14. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0 \quad \cdots\cdots ㉠$

해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은

$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면

$x^2-5x+6<0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해

양변에 -1 을 곱하면

$-x^2+5x-6>0 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

15. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-5x\le 0 \\ (x+1)(x-a)>0 \end{cases}$ 의 해가 $2<x\le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

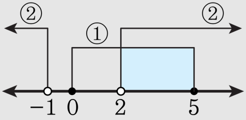
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2-5x=x(x-5)\le 0$

$\therefore 0\le x\le 5\cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a>-1$ 이어야 한다.

$\therefore x<-1, x>a\cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2<x\le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.



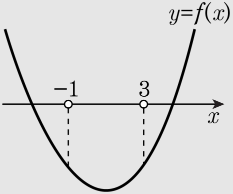
16. $-1 < x < 3$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x)=x^2+2(k-1)x+3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1)\le 0,\ f(3)\le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1)\le 0$ 에서 $(-1)^2+2(k-1)\cdot(-1)+3k\le 0,\ k+3\le 0$
$\therefore k\le -3$
(ii) $f(3)\le 0$ 에서 $3^2+2(k-1)\cdot 3+3k\le 0,\ 9k+3\le 0$
$\therefore k\le -\dfrac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $k\le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

17. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

18. 원 $(x-8)^2+(y-1)^2=4$ 을 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이동 시킨 도형의 방정식이 $(x+a)^2+(y+b)^2=4$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 1　　④ 4　　⑤ 7

해설

원 중심을 $y=2x$ 에 대해 대칭시킨다.
대칭된 점을 $\mathrm{O}'(-a,\ -b)$ 이라고 할 때
$\overline{\mathrm{OO}'}$ 은 $y=2x$ 에 수직하고 $\overline{\mathrm{OO}'}$ 의 중점은 $y=2x$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{-b-1}{-a-8}\times 2=-1 \Rightarrow a+2b=-10\cdots ①$$

$$\Rightarrow \frac{-b+1}{2}=2\times\frac{(-a+8)}{2} \Rightarrow 2a-b=15\cdots ②$$

두 식을 연립하면 $a=4,\ b=-7$

$\therefore\ a+b=-3$

19. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 f : $(x,\ y) \to (x-a,\ y-1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여
평행이동하면 $(y+1) = (x+a)^2 - 2(x+a)$
$y = x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 1$
이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로
y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면
$x^2 + (2a-4)x + a^2 - 2a - 1 = 0$ 이고
이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.
두 교점의 x좌표를 $x_1,\ x_2$ 라 하면
$x_1 + x_2 = -(2a-4)$
$\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-(2a-4)}{2} = 0$ 이므로 a 의 값은 2

20. 점 A $(a, 2)$ 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이는 20 이다. 이 때, 양수 a 의 값은?

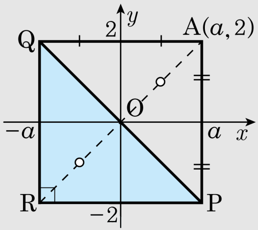
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 점 A $(a, 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점은 P $(a, -2)$
점 A $(a, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 Q $(-a, 2)$
점 A $(a, 2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 R $(-a, -2)$
따라서, 삼각형 PQR 는 $\angle R = 90°$ 인 직각삼각형이다.
이때, $\overline{PR} = 2a, \overline{QR} = 4$ 이고
삼각형 PQR 의 넓이는 20이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4 = 20$$

$\therefore a = 5$



21. 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=9$을 점 $(4,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 원의 중심은?

① $(4,\ 2)$ ② $(9,\ 3)$ ③ $(5,\ 1)$

④ $(3,\ 3)$ ⑤ $(8,\ 4)$

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다.

구하려는 중심을 $(a,\ b)$ 라 하면

$(x+1)^2+(y-1)^2=9$의 중심$(-1,\ 1)$과 구하려는 중심 $(a,\ b)$의 중점은 $(4,\ 2)$

따라서 두 중심의 중점인

$$\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)=(4,\ 2)$$

$\therefore a=9,\ b=3$

22. 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}(a,\ b)$라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$가

직선 $4x-2y-5=0$ 위에 있으므로

$4\cdot\dfrac{1+a}{2}-2\cdot\dfrac{2+b}{2}-5=0$

$\therefore\ 2a-b=5\ \cdots$ ㉠

또한, 직선 AB와 직선 $4x-2y-5=0$이

수직이므로 $\dfrac{b-2}{a-1}\times 2=-1$

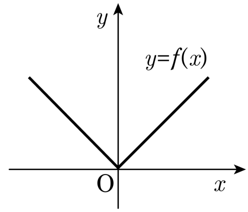
$\therefore\ a+2b=5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

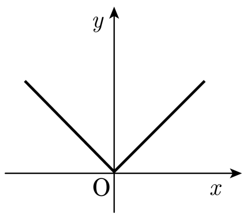
$\therefore\ \mathrm{B}(3,\ 1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

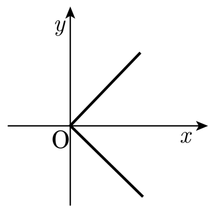
23. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중
$y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



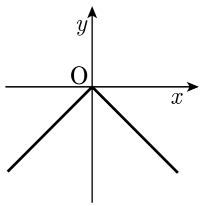
①



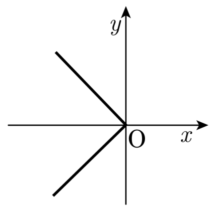
②



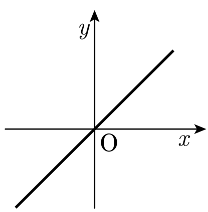
③



④



⑤



해설

$y = -f(-x)$, 즉 $-y = f(-x)$ 는 $y = f(x)$ 에
x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입한 것이므로
$y = f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여
대칭이동한 것이다.
따라서, $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로
옳은 것은 ③이다.

24. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

④ $(x+1)^2+y^2=2$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1인 ②이다.

25. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$

① -1 ② 3 ③ $-\dfrac{9}{4}$ ④ $\dfrac{9}{16}$ ⑤ $-\dfrac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0 \therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\{9-3b+a=0\}\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{9}{4},\ b=\dfrac{9}{4},\ ab=-\dfrac{81}{16}$

26. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$의 한 근이 $1 + 2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면

네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$

$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

27. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$ ③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2},\ 1$ ⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ $-$ ㉡ $\times 8$에서 $x^2-11xy-26y^2=0,\ (x+2y)(x-13y)=0$
$x+2y=0 \cdots\cdots$ ㉢
$x-13y=0 \cdots\cdots$ ㉣
㉡, ㉢에서 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm 1,\ x=\mp 2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2=1$
$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

28. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$　② $-2 \le x < 0$　③ $-1 \le x < 1$

④ $-1 \le x < 0$　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$

$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$

$[A]([A]+3)<0 \quad \therefore -3<[A]<0$

$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \leqq x-1 < 0$이므로

$-1 \le x < 1$

29. 모든 내각의 크기가 $180°$ 보다 작은 육각형의 각 변의 길이가 $10,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2x,\ y$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값은? (단, $x,\ y$ 는 자연수)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 13

해설

다각형의 결정조건에 의해 $2x+y>5$

$x,\ y$ 는 자연수이므로,

$x=2,\ y=2$ 일 때 최소가 된다.

$\therefore x^2+y^2=8$

30. 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 $60°$ 이다.
㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

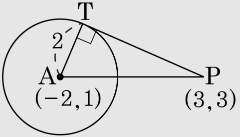
두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 의 자취는 $(0,0)$ 과 $(-4,0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=$
$\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA=30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

31. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{26}$ ③ 6 ④ $\sqrt{37}$ ⑤ 7

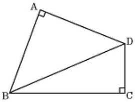
해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로
중심이 (−2, 1) 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\overline{PT}^2=\overline{PA}^2-\overline{AT}^2$$
$$=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2$$
$$=25$$
$\therefore\ \overline{PT}=5$

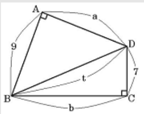
32. 네 변의 길이는 서로 다른 자연수이고, $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{CD}}=7$, $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=90°$이 사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD의 길이를 t라 할 때, t^2의 값을 구하면?



① 83 ② 85 ③ 87 ④ 120 ⑤ 130

해설

$\overline{\mathrm{AD}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$, $\overline{\mathrm{BD}}=t$라 할 때,



$9^2+a^2=7^2+b^2$, $b^2-a^2=32$

(자연수이므로, $b>a$)

$(b-a)(b+a)=32 \;\Rightarrow$ 부정방정식

$b>a$이므로

$b-a$, $b+a$ 모두 자연수이므로,

곱이 32가 되는 수의 조합은

$1\times32=32$, $2\times16=32$, $4\times8=32$, $\cdots$

$b-a=4$, $b+a=8$일 때 조건이 성립하므로,

$a=2$, $b=6$이다.

$b+a=16$, $b-a=2$일 때도

성립하나, 서로 다른 자연수 조건에 위배하므로,

$\therefore\; t^2=9^2+2^2=81+4=85$

33. 학생 수가 50 명인 어느 반의 반장 선거에 A, B, C 세 사람이 출마하였다. 중간 개표 결과 A 는 16 표, B 는 7 표, C 는 10 표를 얻었을 때, A 가 나머지 표 중 최소 몇 표를 얻어야 당선이 확정되는지 구하여라.

▶ 답 : 표

▷ 정답 : 6 표

해설

중간 개표 수는 $16+7+10=33$ (표) 이므로 남은 표는 $50-33=17$ (표) 이다.
A 가 반장이 되기 위해 접전이 펼쳐질 때를 생각하면 2 등인 C 와 경쟁할 때이고, A 가 x 표를 얻었다고 가정하면 그로부터 A 가 얻게 되는 표의 수의 합이 나머지 $(17-x)$ 표를 모두 C 가 얻는 결과보다도 많으면 무조건 A 는 반장으로 선출된다.
즉, $16+x>10+(17-x)$
$\therefore\ x>\dfrac{11}{2}$
따라서 A 가 당선이 확정되기 위해서는 최소 6 표를 더 얻어야 한다.

34. 두 이차함수 $f(x) = x^2 - x + 2a + 1$, $g(x) = 2x^2 - ax + 3a$에 대하여 $f(x) > g(x)$를 만족하는 실수 x가 존재하도록 a의 값의 범위를 정하면 $a < \alpha$ 또는 $a > \beta$이다. 이 때, 두 상수 α, β의 곱 $\alpha\beta$의 값은? (단, $\alpha < \beta$이다.)

① -5　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 5

해설

$f(x) > g(x)$ 이므로 $x^2 - x + 2a + 1 > 2x^2 - ax + 3a$
$x^2 - (a-1)x + (a-1) < 0$
위의 부등식을 만족하는 x 의 값이 존재하려면
이차방정식 $x^2 - (a-1)x + (a-1) = 0$ 의 판별식을 D라 할 때,
$D > 0$ 이어야 하므로 $D = (a-1)^2 - 4(a-1) > 0$
$(a-1)(a-5) > 0$
$\therefore a < 1$ 또는 $a > 5$
따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 5$이므로 $\alpha\beta = 5$

35. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > \mathrm{O}, r > \mathrm{O}) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠, ㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} =$ (㉯) $\cdot\ |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2-r^2}{1-m^2}$, $1-m^2$, $|a^2-r^2|$
② $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2}$, $1+m^2$, $|a^2-r^2|$
③ $\dfrac{a^2-r^2}{1-m^2}$, $2(1-m^2)$, $2|a^2-r^2|$
④ $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2}$, $2(1+m^2)$, $2|a^2-r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2}$, $r(1+m^2)$, $r|a^2-r^2|$

해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서
$$\alpha\beta = \frac{a^2-r^2}{1+m^2}$$
$\mathrm{A}(\alpha, m\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{\alpha^2+(m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2+(m\beta)^2}$
$= (1+m^2)|\alpha\beta| = |a^2-r^2|$