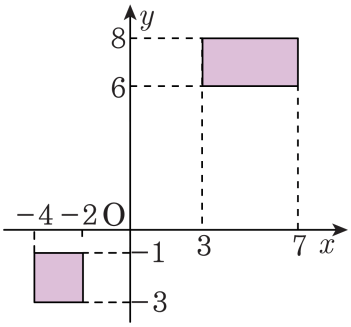
1. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
l의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7-(-2)}{5-(-3)} = \frac{9}{8}$$

2. 직선 $5x+2y+1=0, 2x-y+4=0$의 교점을 지나고, 직선 $x+y+1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $x+y+3=0$ ② $x-y+3=0$ ③ $x+y-3=0$

④ $x-y-3=0$ ⑤ $2x+y+3=0$

해설

두 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$(5x+2y+1)+k(2x-y+4)=0$
$\therefore\ (5+2k)x+(2-k)y+(1+4k)=0 \cdots$ ㉠
이 직선이 $x+y+1=0$ 에 수직이므로

$$(-1)\times\frac{2k+5}{k-2}=-1$$

$\therefore\ k=-7 \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는
직선의 방정식은 $x-y+3=0$
(보충)
두 직선 $ax+by+c=0,\ \ a'x+b'y+c'=0$ 의
교점을 지나는 직선은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$

3. 중심이 $(1, 3)$ 이고, x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

x 축에 접하는 원의 반지름은 y 좌표의 절댓값과 같으므로,
$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$

4. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2+y^2=1$, $(x-2)^2+(y-1)^2=4$
㉡ $(x+1)^2+y^2=2$, $x^2+(y+3)^2=2$
㉢ $x^2+y^2=2$, $(x+1)^2+(y-1)^2=8$
㉣ $x^2+y^2=4$, $(x-3)^2+(y+4)^2=9$
㉤ $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x+2y+4=0$

① ㉠ ② ㉠, ㉤ ③ ㉡

④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$|r-r'|<d<|r+r'|$ 이어야 한다.
㉡ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉣ 외접한다.

5. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$

② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$

④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2,\ 3)$이 원 위의 점이므로

$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$

$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$

6. 두 점 $\mathrm{A}(3,4), \mathrm{B}(6,2)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ② $\left(\frac{3}{2},0\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2},0\right)$

④ $(4,0)$ ⑤ $(5,0)$

해설

x축 위의 점 P의 좌표를 $(a,0)$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(a-3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{a^2-6a+25}$

$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(a-6)^2+(0-2)^2} = \sqrt{a^2-12a+40}$

조건에서 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{a^2-6a+25} = \sqrt{a^2-12a+40}$

양변을 제곱하면 $a^2-6a+25 = a^2-12a+40$

$6a = 15, \quad \therefore a = \frac{5}{2}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},0\right)$

7. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{P}(0,b)$, $\mathrm{Q}(a,0)$, $\mathrm{B}(5,1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 $\mathrm{A}\,(1,2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(-1,2)$, 점 $\mathrm{B}(5,1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(5,-1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}'}$

$\geq \overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$ 이므로 $k^2=45$

8. 수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분한 점을 C, 외분한 점을 D라 할 때, $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{\square}{\overline{AB}}$가 성립한다. $\square$ 안에 알맞은 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

네 점의 좌표를 각각 A(0), B(b), C(c), D(d)라 하면

$c = \frac{mb}{m+n}$, $d = \frac{mb}{m-n}$

(∵ A의 좌표가 0)

$\therefore \overline{AC} = c - 0 = \frac{mb}{m+n}$

$\overline{AD} = d - 0 = \frac{mb}{m-n}$

$\overline{AB} = b - 0 = b$

$\therefore \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{m+n}{mb} + \frac{m-n}{mb}$

$= \frac{2m}{mb} = \frac{2}{b} = \frac{2}{\overline{AB}}$

9. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 4), B(−2, 6), C(6, 8) 를 꼭지점으로 하는 △ABC 에서 변 AB 의 중점을 P, 변 BC 의 중점을 Q, 변 CA 의 중점을 R 이라 하자. △PQR 의 무게중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

△ABC 의 무게중심과 각 변의 중점을 연결하여 만든 △PQR 의 무게중심은 같다.

△ABC 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-2)+6}{3},\ \frac{4+6+8}{3}\right)=(2,\ 6)$$

따라서 $a=2,\ b=6$

$\therefore\ a+b=8$

10. 기울기가 2 이고 점 (2, 1) 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ 5 ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ 6

해설

기울기가 2 이고 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=2(x-2),\ \therefore y=2x-3\cdots$ ㉠

㉠에 $y=0$ 을 대입하면

$0=2x-3,\quad \therefore x=\frac{3}{2}$ 이므로

x 축과 만나는 점 A 의 좌표는

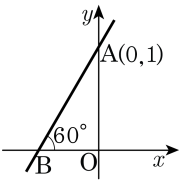
$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

㉠의 y 절편이 -3 이므로 y 축과

만나는 점 B 는 $\mathrm{B}(0,\ -3)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-\frac{3}{2})^2+(-3-0)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

11. 다음 그림과 같이 점 A(0, 1) 을 지나는 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 $60°$ 를 이루고 x 축과 점 B 에서 만날 때, 점 B 의 좌표는?



① $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ② $(-1, 0)$ ③ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

④ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

해설

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 $60°$ 를 이루므로
직선 l 의 기울기는 $\tan 60° = \sqrt{3}$
또한 직선 l 은 점 A(0, 1) 을 지나므로
$y - 1 = \sqrt{3}(x - 0)$
$\therefore y = \sqrt{3}x + 1$
이 직선이 x 축과 만나는 점 B 는 y 좌표가 0 이므로
$0 = \sqrt{3}x + 1$

$$\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

12. 양 끝점의 좌표가 $\mathrm{A}(3, 17)$, $\mathrm{B}(48, 281)$ 인 선분 AB 위의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 15 개 ④ 16 개 ⑤ 46 개

해설

선분 AB 의 방정식은

$$y = \frac{88}{15}(x-3) + 17$$

$3 \le x \le 48$

이때, y가 정수이려면,

$x-3$이 15 의 배수이어야 한다.

따라서 $x = 3, 18, 33, 48$로 모두 4 개이다.

문제의 조건을 만족시키는 점의 좌표는

$(3, 17), (18, 105), (33, 193), (48, 281)$ 로 모두 4 개

13. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

14. 다음은 직선 $x + ay + b = 0$이 제 1, 3, 4사분면을 지날 때, ab의 부호를 조사하는 과정이다.

> $a = 0$이면 주어진 직선이 제 1, 3, 4사분면을 지날 수 없으므로 $a \neq 0$이다.
> 이 때, 직선 $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$에서
> (기울기) (ㄱ) 0
> (y 절편) (ㄴ) 0
> a (ㄷ) 0
> b (ㄹ) 0 이므로 따라서 ab (ㅁ) 0

위의 (ㄱ) ~(ㅁ) 의 부호가 옳지 <u>않은</u> 것은?

① (ㄱ): $>$ ② (ㄴ) : $<$ ③ (ㄷ) : $<$

④ (ㄹ) : $<$ ⑤ (ㅁ) : $<$

해설

직선 $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ 의 그래프가
제 1, 3, 4 사분면을 지나려면
기울기는 양수, y 절편은 음수이어야 한다.

(기울기)$= -\frac{1}{a} > 0$

(y 절편)$= -\frac{b}{a} < 0$

$a < 0,\ b < 0$이므로 $ab > 0$

15. 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $2x+by+1=0$에 수직이고 직선 $x-(b-1)y-1=0$과 평행할 때, a^2+b^2의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

두 직선 $x+ay+1=0$, $2x+by+1=0$이 서로 수직이므로

$1\cdot 2+a\cdot b=0 \quad \therefore\ ab=-2\cdots$ ㉠

두 직선 $x+ay+1=0$, $x-(b-1)y-1=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{1-b}\neq\frac{1}{-1} \quad \therefore\ a+b=1\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\therefore\ 1-2\cdot(-2)=5$

16. 두 점 A(−1, 4), B(3, 2) 을 이은 선분 AB 의 수직이등분선 위에 있는 점을 고르면?

① (−2, 5)　② (1, 2)　③ (4, 9)

④ (5, −7)　⑤ (7, −15)

해설

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구해보면,

$$y = \frac{2-4}{3-(-1)}(x-3)+2 \quad \therefore\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$\therefore$ 수직이등분성의 기울기는 2 이고 $\overline{AB}$ 의 중점 을 지난다.

$$\Rightarrow\ y = 2\left(x - \frac{-1+3}{2}\right) + \frac{4+2}{2} = 2x+1$$

$\Rightarrow$ 점 (4, 9) 를 지난다.

17. 직선 $kx-(k+1)y-k+2=0$은 k값에 관계없이 항상 일정한 점 $(a,\ b)$를 지난다. 이때, $a+b$값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$kx-(k+1)y-k+2=0$을 k에 대해 정리하면

$(x-y-1)k-y+2=0$

k에 관계없이 성립하려면

$x-y-1=0,\ \ -y+2=0$

$\therefore\ y=2,\ x=3\ \Rightarrow\ (a,\ b)=(3,\ 2)$

18. 두 직선 $x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ 의 교점과 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리는?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ 의 교점은 $(2,1)$

$\therefore$ $4x+3y-1=0$ 까지의 거리 :

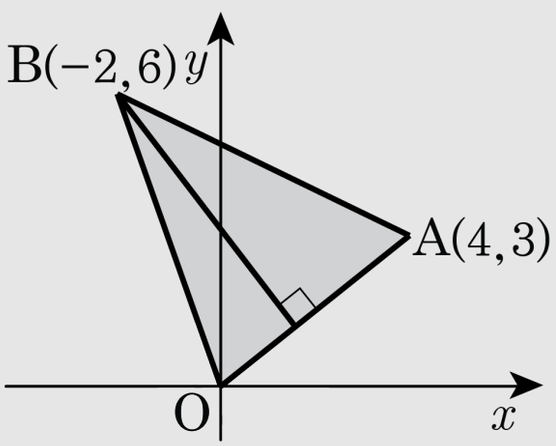
$$\frac{|4\times 2+3\times 1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

19. 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 3)$, $B(-2,\ 6)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 넓이는?

① 9 ② 10 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

해설

$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이고 직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x$



즉 $3x - 4y = 0$ 이므로 점 $B(-2, 6)$ 과 직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-2) - 4 \times 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$

20. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

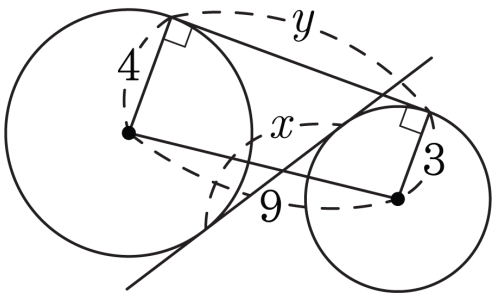
해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
$P(a,\ b)$ 라고 하면

$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$

$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

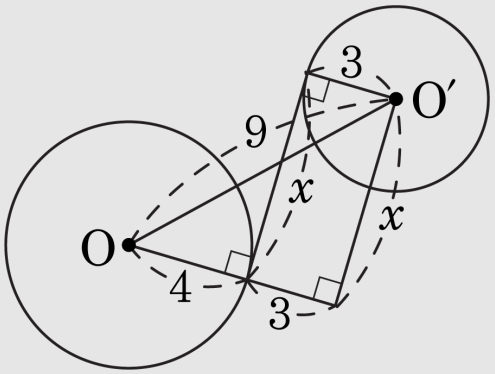
21. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.



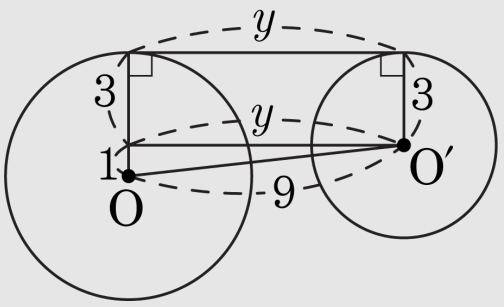
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$9^2 = (4+3)^2 + x^2 \quad \therefore \; x^2 = 9^2 - 7^2$



$9^2 = y^2 + (4-3)^2 \quad \therefore \; y^2 = 9^2 - 1^2$

$\therefore \; x^2 + y^2 = 2 \cdot 9^2 - 7^2 - 1^2 = 112$

22. 원 $x^2+y^2+2y=0$과 직선 $y=mx-3$이 만나지 않을 때, 상수 m의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

③ $-1<m<1$ ④ $-2<m<2$

⑤ $-3<m<3$

해설

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=0 & \cdots ㉠ \\ y=mx-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$(m^2+1)x^2-4mx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-3(m^2+1)=m^2-3$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}=m^2-3<0$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

해설

㉠, ㉡을 변형하면

각각 $x^2+(y+1)^2=1, mx-y-3=0$

이 때, 원의 중심 $(0,-1)$ 에서

직선 $y=mx-3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$d=\frac{|1-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}>1$ 이어야 하므로

$\sqrt{m^2+1}<2, m^2<3$

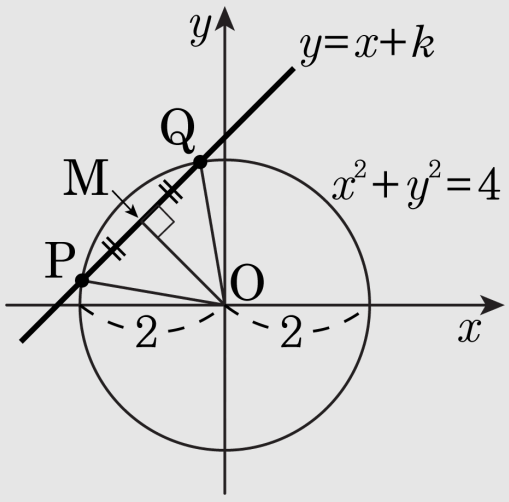
$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

23. 직선 $y = x + k$가 원 $x^2 + y^2 = 4$에 의하여 잘린 현 $\overline{PQ}$의 길이가 2일 때, k의 값은?

① $\pm\sqrt{5}$ ② $\pm\sqrt{6}$ ③ $\pm\sqrt{7}$

④ $\pm 2\sqrt{2}$ ⑤ ± 3

해설



$\overline{PQ} = 2$이므로 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{PM} = 1$

원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP} = 2$

따라서 $\overline{OM} = \sqrt{OP^2 - PM^2}$

$= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

이때 원과 직선 $x - y + k = 0$

사이의 거리는 $\overline{OM}$의 길이와 같으므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{3},\ |k| = \sqrt{6}, k = \pm\sqrt{6}$$

24. 점$P_1(1,\ 2)$를 점$P_2(-1,\ 4)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점$(2, -2)$는 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(0,\ 0)$ ② $(1,\ 1)$ ③ $(4,\ 0)$

④ $(4, -4)$ ⑤ $(1,\ 2)$

해설

주어진 평행이동은 x축 방향으로 -2, y축 방향으로 $+2$만큼 평행이동하므로 $(2-2, -2+2) = (0,\ 0)$으로 이동한다.

25. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 을 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 5 만큼 평행이동 했을 때, 이 원의 중심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=6$

해설

원의 중심 $(1,-2)$ 를 x 축으로 2, y 축으로 5 평행 이동시키면, $(1,-2) \rightarrow (3,3)$

$\therefore a=3, b=3, a+b=6$

26. 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+4)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

27. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 양의 방향으로 -1 , y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 $y = 2x^2$ 의 그래프와 같을 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

1) x 축 대칭 : y 대신에 $-y$ 를 대입

$\Rightarrow -y = ax^2 + x + c$

2) x 축으로 -1, y 축으로 3 이동

$\Rightarrow -(y-3) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

$\Rightarrow y = -ax^2 - (2a+b)x + 3 - a - b - c$

$y = 2x^2$ 과 비교한다.

$\therefore a = -2,\ b = 4,\ c = 1$

$\Rightarrow a + b + c = 3$

28. 직선 $y = 2x+5$를 직선 $y = -1$ 에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

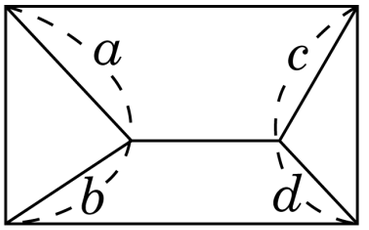
① $y = 2x - 19$ ② $y = 8x + 12$ ③ $y = 3x - 1$

④ $y = -4x - 5$ ⑤ $y = -x + 10$

해설

직선 $y = 2x + 5$ 를 직선 $y = -1$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
y 대신 $2 \cdot (-1) - y$ 를 대입하면 $-2 - y = 2x + 5$,
즉 $y = -2x - 7$
이것을 다시 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동한
도형의 방정식은
x 대신 $2 \cdot 3 - x$ 를 대입하면 $y = -2(6 - x) - 7$
$\therefore y = 2x - 19$

29. 다음 그림과 같이, 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $\sqrt{a}+\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{d}$

② $a+c=b+d$

③ $a+b=c+d$

④ $a^2+d^2=b^2+c^2$

⑤ $a^2+b^2=c^2+d^2$

해설

좌표를 도입하여 점 B 가 원점이 되도록 하면

A$(0,\ q)$, C$(p,\ 0)$ 라 할 수 있고 D$(p,\ q)$ 이다.

이때, E$(x,\ y)$, F$(z,\ y)$ 라고 하면

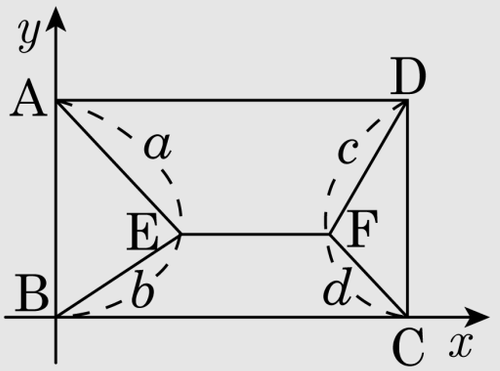
$a^2=x^2+(y-q)^2$

$b^2=x^2+y^2$

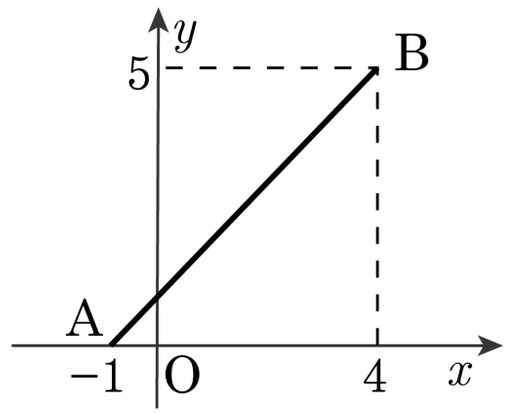
$c^2=(z-p)^2+(y-q)^2$

$d^2=(z-p)^2+y^2$ 이므로

$\therefore\ a^2+d^2=b^2+c^2$



30. 두 점 A(−1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$ ② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$

③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$ ④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$

⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

해설

점 P를 (x, y)라 두면

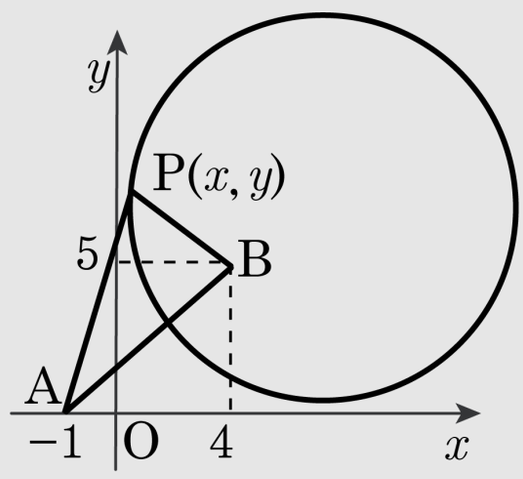
$\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3:2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$



31. 정점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$ ② $3x+4y-6=0$

③ $4x-3y-6=0$ ④ $3x-4y+6=0$

⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a,b)$ 라고 하면

$3a-4b-11=0 \cdots$ ①

$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x,y)$ 라고 하면

$x=\dfrac{3+a}{2}$, $y=\dfrac{2+b}{2}$

$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2 \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$

$\therefore\ 3x-4y-6=0$

32. 두 원 $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2-6x-6y=7$의 공통현의 길이를 구하면?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2=1$은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다.
$x^2+y^2-6x-6y=7$은 중심이 $(3,3)$이고 반지름이 5인 원이다.
공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-6x-6y-7)=0$
$\therefore\ x+y+1=0$
이때, $x^2+y^2=1$의 원과 $x+y+1=0$의 교점을 구하면
$(0,\ -1),\ (-1,\ 0)$에서 접하여 공통현의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

33. 원 밖의 한 점 $(3, -1)$에서 원 $x^2 + y^2 = 4$에 그은 두 접선의 기울기를 p, q라 할 때, $p - q$의 값은? (단, $p > q$)

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 $(3, \ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y + 1 = m(x - 3)$ 즉, $mx - y - 3m - 1 = 0$이라고 하면
원의 중심 $(0, 0)$에서 접선까지의 거리는 원의 반지름 2와 같아야 한다. 따라서

$$2 = \frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} \ , \ |-3m - 1| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱을 하여 정리를 하면,
$5m^2 + 6m - 3 = 0$이다.
이때, 두 기울기 p, q은 이차방정식의 두근이므로
근과 계수와의 관계에 의하여

두근의 합 $p + q = -\frac{6}{5}$, 두근의 곱 $pq = -\frac{3}{5}$

따라서 $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \frac{36}{25} + \frac{12}{5} = \frac{96}{25}$

따라서 $p - q = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

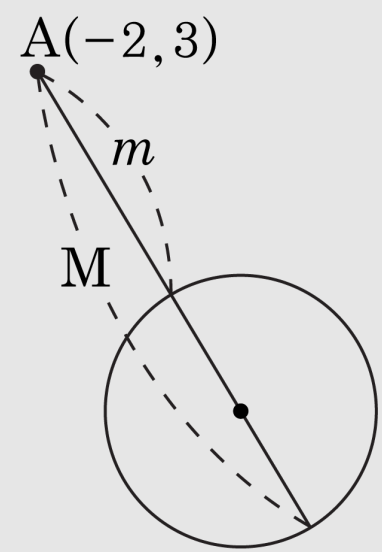
34. 한 정점 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 에 이르는 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할때, $M+m$ 의 값은?

① $2\sqrt{31}$ ② $4\sqrt{2}+2\sqrt{31}$ ③ $2\sqrt{34}$

④ $4\sqrt{2}+2\sqrt{34}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

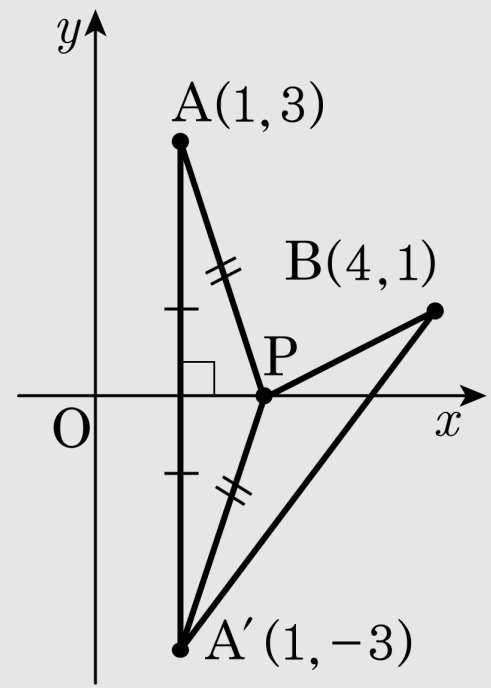
$x^2+y^2-2x+4y-3=(x-1)^2+(y+2)^2-8=0$
에서
$(x-1)^2+(y+2)^2=(2\sqrt{2})^2$
그림에서 점과 원 사이의 거리의 최댓값은
(점과 원의 중심 사이의 거리)+(반지름)
즉 $\sqrt{(-2-1)^2+(3+2)^2}+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{34}$
최솟값은 (점과 원의 중심 사이의 거리)-반지름
$=\sqrt{34}-2\sqrt{2}$
$\therefore M+m=2\sqrt{34}$



35. 두 점 $\mathrm{A}(1,3)$, $\mathrm{B}(4,1)$ 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $\mathrm{A}(1,3)$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 A' 이라 하면
$\mathrm{A}'(1,-3)$
이 때, 다음 그림에서
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}$
또, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}=\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$